N. GHIRCOIAȘIU • M. IASINSCHI • A. VICIU

FIȘE
DE GEOMETRIE ȘI TRIGONOMETRIE
pentru
elevi și absolvenți de licee

EDITURA DACIA, CLUJ-NAPOCA

1978

Prefață

Fișele de Geometrie și Trigonometrie au fost întocmite după aceleași principii ca și cele de Algebră, deci după o parte teoretică, ele conțin exerciții și probleme cît mai diverse. Pentru a veni în ajutorul cititorilor, a căror pregătire poate fi foarte diferită, enunțurile exercițiilor mai grele au fost marcate cu una sau două steluțe. Pentru același motiv, unele soluții sînt redactate mai dezvoltat, permițînd astfel însușirea unor metode de rezolvare.

Referenților, prof. dr. docent Gh. Pic și prof. dr. F. Rado, de la Universitatea Babeș-Bolyai din Cluj-Napoca, le exprimăm și aici recunoștința noastră pentru observațiile lor care au contribuit la ridicarea nivelului acestei cărți

Desenele au fost făcute de tov. Ion Csucsuia, de la Institutul Politehnic din Cluj-Napoca, cu aceeași grijă pentru calitate și exactitate pe care a arătat-o și în alte ocazii. Noi îi mulțumim pentru contribuția sa la apariția acestor Fișe.

Condițiile tehnice deosebite asigurate se datoresc muncii unui număr mare de specialiști din Editura Dacia și Întreprinderea Poligrafică Brașov, cărora le mulțumim călduros.

Cluj-Napoca 15 nov. 1977 **Autorii**

Cuprinsul

Partea I: NOȚIUNI TEORETICE DE BAZĂ

Introducere 7

Capitolul 1: GEOMETRIE PLANĂ

1. Drepte și unghiuri 9
   1.1. Segmente 9
   1.2. Unghiuri 12
   1.3. Perpendiculare 13
   1.4. Măsura unghiurilor 14
   1 5. Paralele 15
   1.6. Locuri geometrice 17
2. Cercul 17
   2.1. Arce și coarde 19
   2.2. Poziția relativă a două cercuri. Tangente comune 20
   2.3. Unghiuri și cercuri 21
   2.4. Puterea unui punct față de un cerc. Axă radicală 23
   2.5. Pol și polară în raport cu un cerc 25
   2.6. Lungimea unui cerc. Aria unui cerc. Sector de cerc și segment de cerc 26
3. Poligoane 26
   3.1. Triunghiuri 28
   3.2. Patrulatere convexe 40
   3.3. Poligoane regulate 43
4. Construcții geometrice 52
   4.1. Construcții cu rigla și compasul 52
5. Transformări geometrice în plan și spațiu 66
   5.1. Translația 66
   5.2. Rotația 67
   5.3. Simetria 67
   5.4. Omotetia și asemănarea 68
   5.5. Transformarea prin polare reciproce 69
   5.6. Inversiunea 70
6. Conice 72
   6.1. Elipsa 72

6.2. Hiperbola 74
6.3. Parabola 75
6.4. Definiția unitară a conicelor 77
6.5. Pol și polară la o conică 77

Capitolul II: GEOMETRIE ÎN SPAȚIU

7. Drepte și plane 79
7.1. Generalități 79
7.2. Drepte și plane paralele 80
7.3. Drepte și plane perpendiculare 81
7.4. Unghiuri diedre. Plane perpendiculare. Unghiuri poliedre 83
7.5. Proiecții 85
8. Poliedre 87
8.1. Generalități 87
8.2. Prisma 87
8.3. Piramida 89
8.4. Trunchiul de prismă 90
8.5. Poliedre regulate 90
9. Elemente de algebră vectorială 92
9.1. Definiții 92
9.2. Operații cu vectori 93
10. Corpuri rotunde 101
10.1 Cilindrul 101
10.2. Conul 102
10.3. Suprafețe de rotație 103
10.4. Sfera 104

Capitolul III: TRIGONOMETRIE

11. Trigonometrie plană 109
11.1. Funcțiile trigonometrice 109
11.2. Funcțiile trigonometrice inverse 114
11.3. Formule de adunare și consecințe 116
11.4. Egalități trigonometrice 121
11.5. Inecuații trigonometrice 122
11.6. Relații trigonometrice într-un triunghi 122
11.7. Relații trigonometrice într-un patrulater 125

Anexa: AXIOMELE GEOMETRIEI 127

Partea II: ENUNȚURILE EXERCIȚIILOR 133

Partea III: SOLUȚIILE EXERCIȚIILOR 215

TEORIE

Geometrie — introducere

Primele noțiuni de geometrie au fost obținute prin examinarea corpurilor materiale. Corpul material este limitat; limita lui se numește *suprafața* corpului. O porțiune de suprafață este limitată de o *curbă*, iar o porțiune de curbă se termină într-un *punct*.

Noțiunile de suprafață, curbă și punct, pot fi considerate independent de suportul lor material. Astfel prin mișcarea unui punct se obține o curbă, prin mișcarea unei curbe se obține o suprafață, iar prin mișcarea unei suprafețe se obține un volum.

Se numește *figură geometrică*, o mulțime de puncte, curbe și suprafețe.

Asupra figurilor se pot face diferite transformări geometrice. O *transformare geometrică* este o aplicație bijectivă a planului (spațiului) pe el însuși. Transformarea identică este aplicația bijectivă identică. Ea lasă nemodificate toate punctele planului (spațiului). Două figuri care se obțin una din alta printr-o transformare geometrică se numesc *figuri congruente* sau *figuri omoloage*. Transformările cele mai importante sînt *izometriile*, care se împart în *deplasări* și *antideplasări* (*oglindiri*). În primul caz, unui plan suprapus pe altul îi admitem orice mișcare care păstrează cele două plane suprapuse, iar în al doilea caz admitem și răsturnarea planului. O deplasare fără punct fix se numește *translație*, iar o deplasare cu punct fix se numește *rotație*. Noțiunile se pot defini și în spațiu, într-o deplasare admitem orice alunecare a spațiului pe el însuși fără oglindiri, iar într-o antideplasare admitem și oglindiri. O deplasare fără puncte fixe se numește *translație*, iar deplasarea în care punctele fixe se găsesc pe o dreaptă Δ, se numește *rotație* de axă Δ. Două figuri obținute printr-o izometrie se numesc *izomere*, sau impropriu, *egale*. Așa va trebui să se înțeleagă pe viitor egalitatea unghiurilor, poligoanelor etc. Proprietatea cea mai importantă a izometriilor este că ele păstrează lungimile și unghiurile.

O transformare se numește *asemănare* dacă distanțele dintre punctele omoloage sînt proporționale, iar unghiurile omoloage sînt egale. Figurile omoloage se numesc *figuri asemenea*. Factorul de proporționalitate k, se numește *raport de asemănare*. Raportul lungimilor,

volumelor omoloage din două figuri asemenea, sînt egale respectiv cu k, k^2 și k^3.

Geometria studiază proprietățile figurilor. După cum acestea sînt situate într-un singur plan sau nu, ea se împarte în *geometrie plană* și *geometrie în spațiu*.

Proprietățile figurilor sînt exprimate prin *propoziții* dintre care unele numite *axiome* (axiomă=evaluare, opinie, teză admisă) sînt evidente prin ele însăși, iar altele, numite *postulate* se admit fără demonstrație (postulare=a cere, l. lat.). Propozițiile care se demonstrează se numesc *leme*, *teoreme* sau *corolarii*. Primele au rolul de a facilita demonstrația unei teoreme, iar ultimele sînt consecințe imediate ale unei teoreme. Teorema are deci rolul important în dezvoltarea ramurii respective, dar din punct de vedere logic nu este nici o deosebire între ele.

În orice demonstrație trebuie să se țină seama de ipotezele făcute și pe baza axiomelor și a altor teoreme demonstrate anterior, cu ajutorul unor raționamente logice, trebuie să se obțină concluzia propoziției enunțate. Inversînd rolurile ipotezei și concluziei dintr-o teoremă, se obține *teorema reciprocă* a ei.

Cea mai simplă curbă este *linia dreaptă*, pe scurt *dreapta*. Noțiunea nu se poate defini și ea a fost obținută prin abstractizare (de exemplu un fir bine întins ne dă imaginea unei drepte). Se admite că prin două puncte trece o singură dreaptă (postulat). Ea este nelimitată în ambele sensuri (postulat). Orice punct al unei drepte o împarte în două *semidrepte* (definiție).

Cea mai simplă suprafață este *planul* și el are proprietatea că oricare ar fi două puncte ale lui, dreapta ce trece prin ele este conținută complet în plan (definiție). Se admite că prin trei puncte nesituate pe o dreaptă trece un plan (postulat). Orice dreaptă dintr-un plan îl împarte în două *semiplane* (definiție).

Dezvoltarea logică a întregii geometrii, pornind de la definiții, axiome și postulate, a fost făcută încă din vechime. Sinteza acetei dezvoltări este celebra lucrare *Elementele*, datorită lui *Euclid* (sec. III. î.e.n.) care a fost socotită timp de peste 2000 de ani, cartea de căpătîi în învățămîntul geometriei. Despre modul de desfășurare a materialului, despre critica ce i s-a adus în sec. XVIII-lea și despre axiomatizarea modernă a geometriei, ne vom ocupa în Anexă (p. 127).

În studiul figurilor geometrice s-au dovedit foarte utile niște funcții de unghiurile unui triunghi, numite *funcții trigonometrice*. Ramura din matematici care se ocupă cu studiul acestor funcții și cu aplicațiile lor la triunghiuri poartă denumirea de *trigonometrie*. Dacă triunghiurile sînt plane, avem *trigonometria plană*, iar dacă ele sînt triunghiuri sferice avem *trigonometria sferică*.

Capitolul I

GEOMETRIE PLANĂ

1. DREPTE ŞI UNGHIURI

1.1. SEGMENTE

Porţiunea din dreapta care trece prin două puncte A şi B şi care este cuprinsă între ele se numeşte *segmentul* AB. Se utilizează şi noţiunea de *segment orientat* AB, în care punctul A se numeşte originea sau începutul segmentului, iar punctul B extremitatea sau sfîrşitul lui. Sensul de la A la B se numeşte *sensul segmentului.* Alegînd o unitate de măsură, fiecare segment are o *lungime,* care se notează tot cu AB. Două segmente se zic egale dacă există o izometrie care-l transformă pe unul în altul.

Observaţie importantă. În operaţiile cu lungimile segmentelor se utilizează curent terminologia „operaţii asupra segmentelor" în loc de operaţii asupra lungimilor segmentelor. Aşa trebuie înţelese noţiunile de sumă, produs, cît a două segmente, medie geometrică a două segmente, segmente proporţionale etc. La fel trebuiesc înţelese expresiile: laturi egale, raportul catetelor, pătratul unei laturi, laturi proporţionale etc.

O linie frîntă este formată dintr-un număr de segmente aşezate cap la cap unul după altul. Capetele segmentelor se numesc vîrfurile liniei poligonale. Notaţia obişnuită pentru o linie poligonală constă din succesiunea literelor care reprezintă vîrfurile ei. O linie frîntă închisă se numeşte *poligon.*

1.1.1. Măsura segmentelor

În problemele în care intervin segmente situate pe aceeaşi dreaptă, trebuie uneori să se ţină seama de orientarea lor. În acest scop se *orientează* dreapta alegîndu-se unul dintre cele două sensuri, ca *sens direct.* Noţiunea de *măsură* a unui segment AB se defineşte în felul următor: dacă segmentul are acelaşi sens ca şi sensul direct de pe dreaptă, măsura

lui este egală cu lungimea lui, iar în caz contrar, cu opusul acestui număr. Cum în unele cărți lungimea și măsura unui segment se notează la fel, pentru evitarea confuziilor noi vom nota măsura segmentului AB cu $[AB]$, semnalînd însă că ea intervine în puține locuri. Avem $[AB]=-[BA]$. (În geometria analitică măsura unui segment AB apare peste tot și se notează cu AB, pentru lungimea segmentului utilizîndu-se notația $|AB|$). Pentru trei puncte A, B, C de pe o dreaptă orientată avem *relația lui Chasles*

$$[AB]+[BC]=[AC],$$

oricare ar fi poziția punctelor de pe dreaptă.

1.1.2. Diviziune armonică

Se zice că un punct M împarte un segment dat AB într-un raport λ, dacă avem

$$\frac{[MA]}{[MB]}=\lambda.$$

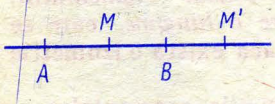


Fig. 1.1

Luînd pe dreapta AB o origine O, o unitate de măsură și ca sens direct sensul lui AB, apelînd la geometria analitică, abscisele punctelor A, M și B să fie a, x, b (Fig. 1.1), atunci

$$\lambda=\frac{x-a}{x-b},$$

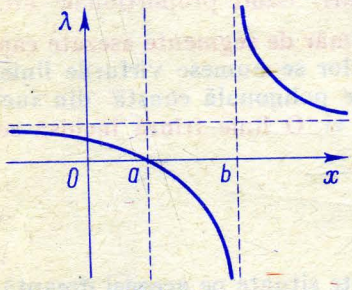


Fig. 1.2

a cărui grafic este dat în fig. 1.2. Se vede acum clar că raportul λ ia orice valoare pozitivă sau negativă o singură dată, valorile pozitive fiind luate în afara intervalului AB (valoarea 1 la infinit) iar cele negative în interiorul acestui interval.

Fiind dat un punct C care împarte un segment AB în raportul λ (pozitiv, negativ sau nul) este important punctul D care împarte același segment în raportul $-\lambda$ (fig. 1.3), deci avem

$$\frac{[CA]}{[CB]}=-\frac{[DA]}{[DB]},$$

relație care se mai poate scrie

$$\frac{2}{AB}=\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD},$$

de unde rezultă că segmentul AB este *medie armonică* între segmentele AC și AD.

Se zice că punctul C este *conjugat armonic* cu punctul D, față de punctele A și B. În mod evident punctul C este conjugat armonic cu punctul D față de aceleași puncte. Se mai spune că A, B sînt *conjugate armonic* cu C, D, sau că perechile de puncte A, B și C, D sînt conjugate armonic, sau în fine că punctele A, B, C, D formează o *diviziune armonică*. Orice punct de pe dreapta AB are un conjugat armonic, cu excepția mijlocului segmentului AB. Cele două puncte C, D conjugate armonic față de A și B sînt ambele de aceeași parte a mijlocului segmentului AB. Cînd un segment AB împarte armonic un segment CD, atunci unul dintre punctele C și D este interior iar celălalt exterior segmentului AB, prin urmare segmentele AB și CD se suprapun parțial. Dacă însă două segmente CD și $C'D'$ împart armonic segmentul AB, atunci fie că unul dintre ele este complet cuprins în celălalt, fie că ele nu au nici un punct comun.

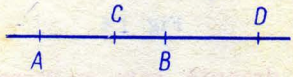


Fig. 1.3

1.1.3. Raport anarmonic

Pentru patru puncte A, B, C, D, situate pe o dreaptă, se numește *raport anarmonic* sau *biraport*, expresia

$$(ABCD)=\frac{[CA]}{[CB]}:\frac{[DA]}{[DB]}.$$

Permutînd între ele cele patru puncte obținem $4!=24$ rapoarte, dintre care numai 6 sînt distincte. Notînd unul cu r, acestea sînt

$$r,\ \frac{1}{r},\ 1-r,\ \frac{1}{1-r},\ \frac{r}{r-1},\ \frac{r-1}{r}.$$

În cazul cînd cele patru puncte formează o diviziune armonică raportul anarmonic este -1.

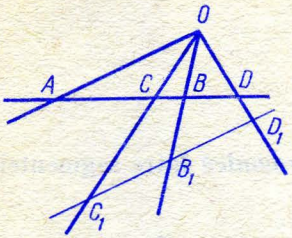


Fig. 1.4

Raportul anarmonic al punctelor de intersecție al unei transversale cu patru drepte ce trec prin același punct, este independent de transversală, de aceea el este numit *raport anarmonic al fascicolului* celor patru drepte (Fig. 1.4).

În particular, dacă punctele A, B, C, D formează o diviziune armonică, atunci unindu-le cu un punct O oarecare, vom obține un *fascicol armonic*, care împarte armonic orice altă dreaptă, care nu trece prin O. O condiție necesară și suficientă pentru ca un fascicol să fie armonic este ca o paralelă la una din dreptele fascicolului (razele fascicolului) să fie împărțită în două părți egale de celelalte drepte. Ca exemplu: bisectoarele unui unghi și laturile unghiului formează un fascicol armonic.

Rezultă din cele de mai sus teorema: locul geometric al conjugatului armonic al unui punct D, prin raport cu punctele de intersecție cu două drepte fixe OA și OB, ale unei secante oarecare ce trece prin punctul D este o dreaptă OC, așa ca OA, OB, OC și OD să formeze un fascicol armonic (Fig. 1.4). Dreapta OC se numește *polara* punctului D față de dreptele OA și OB, iar punctul D este *polul* dreptei OC față de dreptele OA și OB.

1.2. UNGHIURI

Se numește unghi figura geometrică formată din două semidrepte AB, AC, care pornesc din același punct A (Fig. 1.5). Punctul A se numește *vîrful unghiului*, iar cele două semidrepte se numesc *laturile unghiului*. Unghiul se notează cu semnul $\sphericalangle$ urmat de literele care desemnează semidreptele, de exemplu $\sphericalangle BAC$, (citește unghiul BAC) litera din mijloc fiind cea care corespunde vîrfului. Dacă nu poate fi nici un dubiu (nu sînt alte unghiuri cu același vîrf), unghiul se notează numai cu litera corespunzătoare vîrfului, de exemplu $\sphericalangle A$. Uneori ca semn al unghiului se utilizează accentul circumflex, deci se scrie de exemplu $\widehat{BAC}$, $\hat{A}$.

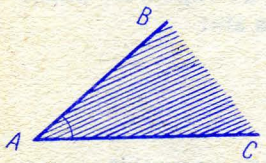


Fig. 1.5

Observație. Termenul de unghi are mai multe accepțiuni afară de cea de mai sus, la care convențional să-i spunem „unghi simplu".

Astfel:

— prin *unghi geometric* se înțelege clasa tuturor unghiurilor simple izomere cu un unghi simplu dat;

— prin *unghi orientat* înțelegem un unghi simplu pentru care s-a precizat că una dintre laturi este prima, iar cealaltă a doua;

— prin *unghi de rotație* se înțelege clasa unghiurilor orientate care pot fi suprapuse pe un unghi orientat dat, printr-o rotație;

— pentru prescurtarea limbajului se înțelege uneori *măsura* (în grade sau radiani) a unui unghi geometric, sau de rotație.

Pe viitor, din contextul paragrafului, va rezulta despre care accepțiune de unghi este vorba. În orice caz cînd se spune „suma unor unghiuri" se înțelege suma măsurilor lor, cu toate că operația se poate defini și pentru unghiuri de rotație, precum și pentru unghiuri geometrice, suficient de mici.

Două unghiuri se numesc *adiacente*, dacă au același vîrf, o latură comună și unghiurile sînt așezate de o parte și de alta a laturii comune. Laturile necomune se numesc *laturi exterioare*. În fig. 1.6 unghiurile BAC și CAD sînt adiacente, dar unghiurile BAC și BAD nu sînt adiacente.

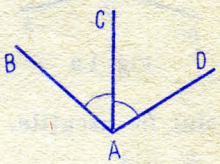


Fig. 1.6

Două unghiuri sînt egale, dacă ele se pot suprapune.

Se numește *bisectoare* a unui unghi o semidreaptă dusă prin vîrf în interiorul unghiului și așa ca să-l împartă în două unghiuri egale. Se numesc *trisectoare* ale unui unghi două semidrepte duse prin vîrful unghiului și care să-l împartă în trei părți egale.

1.3. PERPENDICULARE

Se numește perpendiculară pe o dreaptă ADB, o semidreaptă CD care face cu aceasta două unghiuri adiacente egale (Fig. 1.7). Punctul D se numește *piciorul perpendicularei*. Fiecare din aceste unghiuri se numește *unghi drept*. Două drepte se zic *perpendiculare* dacă în punctul lor de întîlnire formează patru unghiuri drepte. Un rezultat important este că dintr-un punct exterior unei drepte se poate duce o singură perpendiculară pe dreaptă. *Distanța de la un punct la o dreaptă* este lungimea segmentului determinat de punct și piciorul perpendicularei dusă din punct pe dreaptă. Orice semidreaptă DE, care nu coincide cu perpendiculara CD sau cu prelungirea ei, se numește *oblică*. Unghiul făcut de aceasta cu dreapta

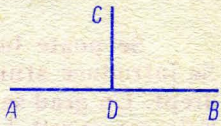


Fig. 1.7

AB este mai mic, sau mai mare decît un unghi drept. În primul caz el se numește *ascuțit*, iar în al doilea caz, *obtuz*.

Dacă suma a două unghiuri este egală cu un unghi drept, unghiurile se numesc *complementare*, iar dacă suma este egală cu două unghiuri drepte, unghiurile se numesc *suplimentare*. Dacă două unghiuri adiacente sînt suplimentare, laturile lor exterioare sînt în prelungire și reciproc. Suma unor unghiuri două cîte două adiacente, formate în jurul unui punct și acoperind tot planul este egală cu 4 unghiuri drepte (fig. 1.8). Bisectoarele a două unghiuri adiacente suplimentare sînt perpendiculare.

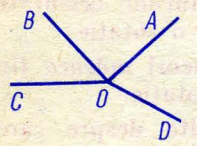


Fig. 1.8

Dacă vîrfurile a două unghiuri coincid și laturile sînt în prelungire (Fig. 1.9), unghiurile se numesc *opuse la vîrf*. Ele sînt egale. Bisectoarele a două unghiuri opuse la vîrf sînt în prelungire.

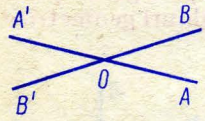


Fig. 1.9

Două unghiuri care au același vîrf și ale căror laturi sînt respectiv perpendiculare sînt sau egale sau suplimentare. Ele sînt egale dacă ambele unghiuri sînt fie ascuțite, fie obtuze și sînt suplimentare dacă un unghi este

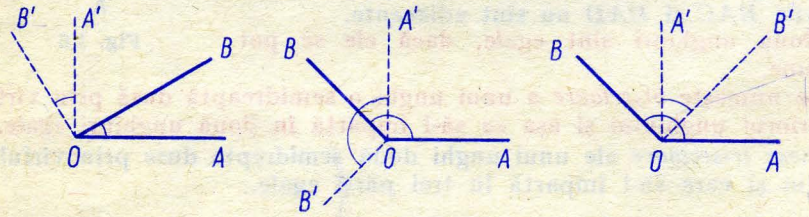


Fig. 1.10

ascuțit, iar celălalt este obtuz (Fig. 1.10).

Se numește *proiecție* (§9.2.3) a unui punct pe o dreaptă punctul de intersecție al dreptei cu perpendiculara dusă din punct pe dreaptă. Proiecția unui segment pe o dreaptă este segmentul obținut proiectînd capetele segmentului pe dreaptă.

1.4. MĂSURA UNGHIURILOR

Se poate lua ca unitate de măsură a unghiurilor, unghiul drept. Se introduce atunci noțiunea de *grad*, care este a 90^a parte din unghiul drept. Un grad se împarte în 60 de minute, iar minutul în 60 de secunde. Este așa-numitul *grad sexagesimal*. Un unghi de 34 de grade, 21 minute și 3 secunde se scrie $34°21'3''$. În anumite probleme este mai comod

să se utilizeze *gradul centesimal* care este a 100^a parte dintr-un unghi drept. Un grad are 100 de minute, iar un minut 100 de secunde. Unghiul de 48 grade, 68 minute și 80 secunde se scrie $48^g68^c80^{cc}$, sau 48,6880 grade centesimale, sau 486880 secunde centesimale.

Pentru a obține o altă unitate de măsură, să presupunem că toate unghiurile considerate sînt *unghiuri la centru* dintr-un anumit cerc (deci unghiuri care au vîrful în centrul cercului). Așa fiind, fiecărui unghi îi corespunde arcul mărginit de laturile unghiului. Oricare ar fi măsura luată pentru arce și măsura luată pentru unghiuri, raportul măsurilor a două unghiuri este egal cu raportul măsurilor arcelor corespunzătoare. De aceea *pentru arce de cerc și unghiuri se poate lua aceeași măsură*, astfel încît unghiului unitate să-i corespundă arcul unitate. În felul acesta măsura arcelor de cerc este obligatoriu independentă de raza cercului, care poate fi luată egală cu unitatea. Pe baza acestora, arcele se pot măsura în grade sexagesimale sau centesimale, dar cel mai des ca măsură a arcelor și unghiurilor se ia *radianul* care este arcul de lungime egală cu raza cercului. Cum pentru un cerc întreg avem 2π radiani, sau $360°$, sau 400^g o regulă de trei simplă permite trecerea de la o unitate de măsură la alta. Astfel dacă un anumit unghi are x grade sexagesimale, sau y grade centesimale, sau z radiani, avem rapoartele egale

$$\frac{x}{360} = \frac{y}{400} = \frac{z}{2\pi}.$$

1.5. PARALELE

Două drepte se zic *paralele*, dacă sînt situate în același plan și dacă ele nu se întîlnesc. Două drepte care se întîlnesc într-un punct se numesc *concurente*.

Atragem atenția că proprietățile de mai jos se referă la drepte situate într-un plan.

Două drepte paralele cu a treia sînt paralele între ele.

Două drepte perpendiculare pe o a treia sînt paralele.

Postulatul lui Euclid. Printr-un punct nesituat pe o anumită dreaptă se poate duce numai o paralelă la aceasta.

Dacă două drepte sînt paralele orice dreaptă concurentă cu una din ele, este concurentă și cu cealaltă.

Dacă secanta este perpendiculară pe una din drepte, este perpendiculară și pe cealaltă.

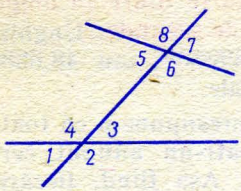


Fig. 1.11

Două drepte tăiate de o a treia dreaptă (Fig. 1.11), formează opt unghiuri numerotate de la 1 la 8. Unghiurile 1, 2, 7 și 8, exterioare paralelelor se numesc *unghiuri externe*, iar celelalte patru se numesc *unghiuri interne*. Considerîndu-le două cîte două avem denumirile

unghiuri interne de aceeași parte a secantei (unghiurile 3 și 6, sau 4 și 5),

unghiuri externe de aceeași parte a secantei (2 și 7, sau 1 și 8),

unghiuri alterne interne (3 și 5, sau 4 și 6),

unghiuri alterne externe (2 și 8, sau 1 și 7) și

unghiuri corespondente (1 și 5, sau 2 și 6, sau 4 și 8, sau 3 și 7).

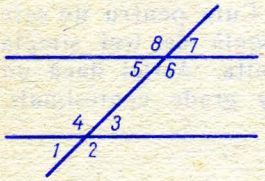


Fig. 1.12

Dacă două paralele sînt tăiate de o secantă, unghiurile ascuțite formate sînt egale și de asemenea unghiurile obtuze sînt egale (Fig. 1.12), deci

unghiurile alterne interne sînt egale,
unghiurile alterne externe sînt egale,
unghiurile corespondente sînt egale,
unghiurile interne de aceeași parte a secantei sînt suplimentare,
unghiurile externe de aceeași parte a secantei sînt suplimentare.

Reciproc, două drepte tăiate de o secantă, sînt paralele dacă este îndeplinită una dintre următoarele condiții:

două unghiuri alterne interne sînt egale,
două unghiuri alterne externe sînt egale,
două unghiuri corespondente sînt egale,
două unghiuri interne de aceeași parte a secantei sînt suplimentare,
două unghiuri externe de aceeași parte a secantei sînt suplimentare.

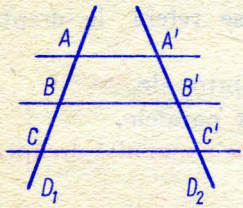


Fig. 1.13

Rezultă că două unghiuri care au laturile două cîte două paralele sînt sau egale sau suplimentare.

Două drepte oarecare sînt tăiate de drepte paralele în segmente proporționale nu numai în lungimea lor, ci și în măsura lor și reciproc. Astfel în fig. 1.13, dreptele D_1 și D_2 sînt tăiate de paralelele AA', BB', CC'. Avem

$$\frac{[AC]}{[A'C']} = \frac{[CB]}{[C'B']} = \frac{[AB]}{[A'B']}.$$

1.5.1. Drepte antiparalele

Două drepte concurente D_1, D_2 se numesc *antiparalele* față de alte două drepte concurente d_1, d_2 (Fig. 1.14), dacă în patrulaterul pe care-l formează, unghiurile opuse sînt suplimentare, deci dacă patrulaterul este inscriptibil (§ 3.2.1).

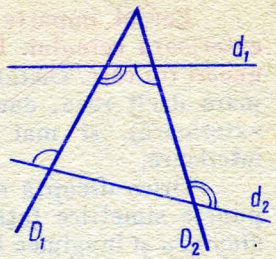


Fig. 1.14

1.6. LOCURI GEOMETRICE

Se numește *loc geometric* mulțimea tuturor punctelor care au o anumită proprietate. Mai jos vom da cîteva exemple pentru cazul cînd locul geometric este o dreaptă. În paragrafele următoare se vor întîlni alte locuri geometrice, unele dintre ele fiind luate ca definiție a unor figuri geometrice (de exemplu la cerc).

1° Locul geometric al punctelor egal depărtate de două drepte paralele este o dreaptă paralelă cu cele două și situată între ele astfel încît pe o perpendiculară comună dreptele să determine două segmente egale (Fig. 1.15).

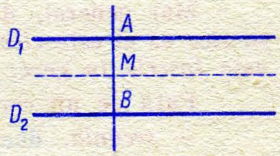


Fig. 1.15

2° Locul geometric al punctelor egal depărtate de două drepte concurente este format de cele două bisectoare ale unghiurilor dintre drepte (Fig. 1.16).

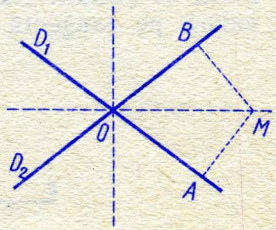


Fig. 1.16

3° Locul geometric al punctelor așa ca raportul distanțelor la două drepte concurente date să fie egal cu un număr dat, este format de două drepte ce trec prin punctul de concurență al dreptelor date.

2. CERCUL

Se numește cerc locul geometric al punctelor egal depărtate de un punct fix numit *centrul* cercului. Distanța de la oricare din punctele lui la centru se numește *raza cercului* (Fig. 2.1). Cercul se notează cu o singură literă, care poate fi aceeași cu cea utilizată pentru centrul lui, uneori plasată între două paranteze.

Două cercuri de aceeași rază sînt egale.

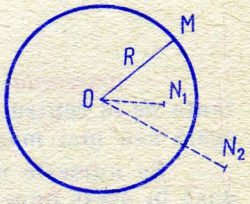


Fig. 2.1

Cercul împarte planul în două regiuni, una interioară, iar alta exterioară cercului. Regiunea interioară se numește *disc* circular, sau uneori tot cerc. Distanța unui punct din plan la centrul cercului este mai mare decît raza, dacă punctul este exterior cercului (deci în regiunea exterioară), și mai mică decît raza, dacă punctul este în regiunea interioară.

Orice dreaptă care trece prin centrul cercului taie cercul în două puncte simetrice față de centru. Segmentul interior cercului se numește *diametru* și lungimea lui este dublul razei. Există o infinitate de diametre, evident toate egale. Orice diametru împarte cercul în două *semicercuri* egale, deci orice diametru este o axă de simetrie a cercului.

Prin trei puncte A, B, C, nesituate în linie dreaptă, trece un singur cerc, numit *cerc circumscris* triunghiului ABC. Se mai spune că triunghiul ABC este înscris în cerc.

Mai general, dacă un cerc trece prin punctele $M_1, M_2, \ldots, M_n$, se zice că el este *circumscris* poligonului $M_1 M_2 \ldots M_n$, sau că poligonul este *înscris* în cerc.

Față de un cerc, o dreaptă poate fi

— *secantă*, dacă intersectează cercul în două puncte,

— *tangentă* dacă întîlnește cercul într-un singur punct, numit *punct de contact*. Raza cercului din punctul de contact este perpendiculară pe tangentă și reciproc,

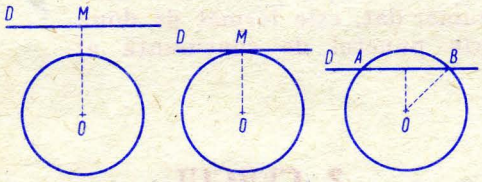


Fig. 2.2

— *nesecantă*, sau *exterioară*, dacă nu intersectează cercul. Distanța de la centrul cercului la dreaptă este în cele trei cazuri mai mică, egală sau mai mare decît raza cercului (Fig. 2.2).

Se numește *normală* la un cerc într-un punct M, perpendiculara dusă în acest punct pe tangenta în M. Punctul M se numește *piciorul normalei*. Normala la cerc în M trece prin centrul cercului și taie cercul

încă într-un punct M_1. Distanța oricărui punct N de pe normală la un punct P de pe cerc este totdeauna cuprinsă între cele două distanțe NM, NM_1 (Fig. 2.3), deci $NM \leqslant NP \leqslant NM_1$.

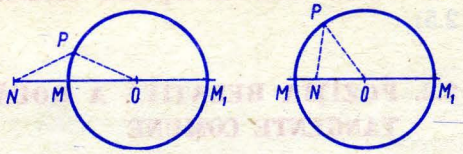


Fig. 2.3

2.1. ARCE ȘI COARDE

Se numește *arc al unui cerc* o porțiune din cerc, delimitată de două puncte, de exemplu A, B și scriem arc AB (Fig. 2.4). De fapt două puncte determină două arce, care împreună formează tot cercul, de aceea trebuie precizat despre care din cele două arce este vorba. În acest scop este utilă orientarea arcelor, fixînd un sens direct de parcurs pe cerc și anume sensul invers mișcării acelor unui ceasornic. Prin arcul AB se înțelege arcul parcurs în sens direct pe cerc de la A la B. Celălalt arc se notează cu arc BA.

Segmentul de dreaptă care unește cele două capete ale unui arc se numește *coardă* și se zice că ea subîntinde arcul, sau că arcul este subîntins de coardă. Cea mai mare coardă dintr-un cerc este un diametru. Diametrul perpendicular pe coardă împarte în părți egale, atît coarda cît și arcul subîntins. Locul geometric al mijloacelor coardelor paralele cu o dreaptă dată este diametrul perpendicular pe aceste coarde.

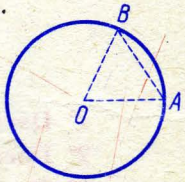


Fig. 2.4

Două arce din același cerc, sau din cercuri cu raze egale, sînt egale dacă ele se pot suprapune.

În același cerc, sau în cercuri egale, două arce egale subîntind coarde egale, iar două arce neegale (mai mici decît un semicerc), subîntind două coarde neegale, cel mai mare arc subîntinzînd cea mai mare coardă și reciproc.

Într-un același cerc, sau în cercuri egale, două coarde egale sînt la aceeași distanță de centru, iar dintre două coarde neegale, cea mai mică este mai depărtată de centrul cercului. Este adevărată și reciproca proprietății.

Două drepte paralele care intersectează un cerc, determină pe acesta arce egale.

Porțiunea din plan mărginită de un arc și coarda care-l subîntinde se numește *segment de cerc*, iar cea măr-

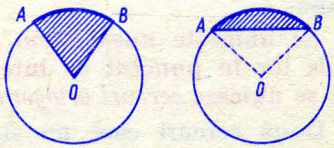


Fig. 2.5

ginită de razele duse în capetele arcului, se numește *sector de cerc* (Fig. 2.5).

2.2. POZIȚIA RELATIVĂ A DOUĂ CERCURI TANGENTE COMUNE

Dacă cele două cercuri au razele R_1 și R_2 ($R_1 > R_2$), iar distanța dintre centrele lor este d, avem următoarele cazuri (Fig. 2.6)

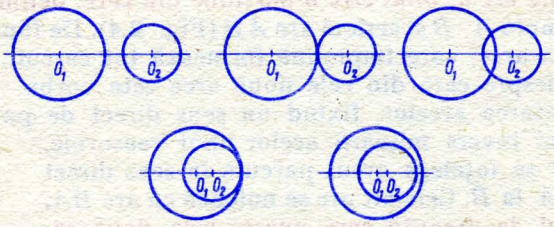


Fig. 2.6

1° Dacă $d > R_1 + R_2$ *cercurile sînt exterioare* unul altuia,

2° Dacă $d = R_1 + R_2$ *cercurile sînt tangente exterior*,

3° Dacă $R_1 - R_2 < d < R_1 + R_2$, *cercurile sînt secante*,

4° Dacă $d = R_1 - R_2$, *cercurile sînt tangente interior*,

5° Dacă $d < R_1 - R_2$, *un cerc este interior celuilalt*,

6° Dacă $d = 0$, cercurile au același centru și se numesc *concentrice*.

Este important de subliniat că în cazul a două cercuri tangente, punctul de tangență se găsește pe linia centrelor.

Observînd figurile de mai sus, rezultatele precedente se pot formula în felul următor: două cercuri sînt exterioare, interioare, secante sau tangente, după cum segmentele pe care le determină pe linia centrelor sînt exterioare, interioare, se suprapun parțial sau au o extremitate comună.

Se numește *unghi făcut de două cercuri*, unghiul format de tangentele lor în punctul de intersecție. Două cercuri care fac un unghi drept se numesc *cercuri ortogonale*.

Două cercuri care nu sînt unul interior altuia, admit *tangente comune*.

Pentru două cercuri exterioare unul altuia avem patru tangente comune, două de aceeași parte a liniei centrelor și două care intersectează această linie. Din cauza simetriei ele sînt două cîte două egale (Fig. 2.7). Cu notațiile de mai sus, tangenta comună exterioară are lungimea

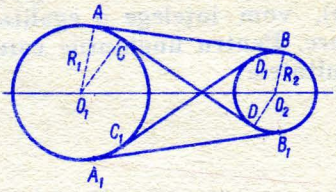


Fig. 2.7

$$\sqrt{d^2-(R_1-R_2)^2},$$

iar tangenta comună interioară are lungimea

$$\sqrt{d^2-(R_1+R_2)^2}.$$

În cazul particular, cînd cele două cercuri sînt tangente exterior, tangenta comună exterioară are lungimea

$$2\sqrt{R_1R_2}.$$

În cazul cînd cercurile sînt secante, ele nu au decît tangente comune exterioare, căci $d<R_1+R_2$, dar $d>|R_1-R_2|$. Lungimea unei tangente comune exterioare este

$$\sqrt{d^2-(R_1-R_2)^2}.$$

Înlocuind un cerc cu un punct, obținem lungimea tangentei dusă dintr-un punct exterior la un cerc

$$\sqrt{d^2-R_1^2},$$

care se obține din formula precedentă pentru $R_2=0$. În acest caz unghiul făcut de cele două tangente, duse din O_2 se numește unghiul sub care se vede din O_2 cercul O_1.

Construcțiile tangentelor la un cerc și a tangentelor comune la două cercuri sînt descrise în § 4.8 și 9.

2.3. UNGHIURI ȘI CERCURI

În §1.4 am arătat care sînt principalele unități de măsură ale unghiurilor și arcelor, căci am spus că un unghi la centru are ca măsură arcul interceptat de laturile sale și reciproc. De aceea cînd vom

scrie o egalitate între unghiuri și arce de cerc (figuri geometrice distincte), vom înțelege o egalitate între măsurile unghiurilor și arcelor de cerc. Pentru unghiurile care nu au vîrful în centrul cercului avem rezultatele:

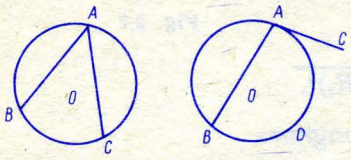


Fig. 2.8

1° Un unghi înscris într-un cerc (cu vîrful pe cerc) are aceeași măsură ca și jumătate din arcul cuprins între laturile sale. Proprietatea rămîne valabilă și dacă una din laturile unghiului este tangentă la cerc (Fig. 2.8).

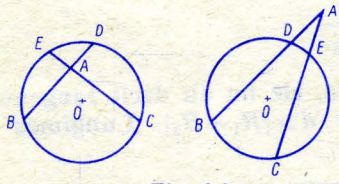


Fig. 2.9

2° Un unghi care are vîrful în interiorul unui cerc, are aceeași măsură ca și semisuma arcelor cuprinse între laturile sale și între prelungirile acestora (Fig. 2.9).

3° Un unghi format de două secante la un cerc și care se întîlnesc în afara cercului, are aceeași măsură ca și semidiferența arcelor cuprinse între laturile lui (Fig. 2.9).

2.3.1. Arc de cerc capabil de un unghi dat

Într-un cerc cu centrul în O, coarda BC determină două arce de cerc CD_1B și BD_2C, a căror semisumă este egală cu 180° (Fig. 2.10). Toate unghiurile BAC, înscrise în segmentul de cerc CD_1B (vîrful A este pe arcul CD_1B), sînt egale între ele (teorema 1°), de aceea se zice că *segmentul BC se vede din punctele arcului* CD_1B *sub un unghi constant* α, *sau că arcul de cerc* CD_1B *este capabil de unghiul* α. Analog, segmentul BC se vede din punctele arcului BD_2C sub un unghi de $180°-\alpha$, deci arcul de cerc BD_2C este capabil de unghiul $180°-\alpha$. **În cazul particular $\alpha=90°$ arcul este un semicerc, deci *orice unghi înscris într-un semicerc, este unghi drept.***

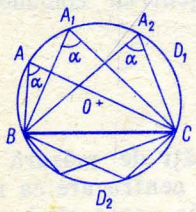


Fig. 2.10

Rezultă de mai sus că locul geometric al punctelor din plan, din care un segment se vede

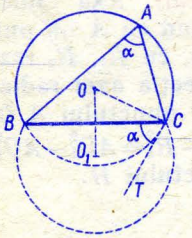


Fig. 2.11

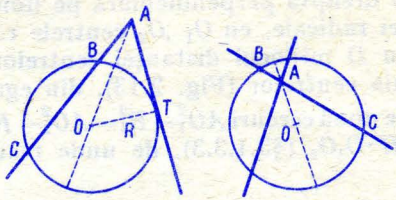


Fig. 2.12

sub un unghi dat α este format din două arce de cerc simetrice față de acest segment. Observînd că $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BCT = \alpha$, unde CT este tangenta la cerc în punctul C (Fig. 2.11), pentru a construi centrul unuia dintre cele două cercuri, ducem întîi dreapta CT, așa ca $\sphericalangle BCT = \alpha$ și apoi intersectăm mediatoarea segmentului BC cu perpendiculara în C pe CT.

2.4. PUTEREA UNUI PUNCT FAȚĂ DE UN CERC. AXĂ RADICALĂ

Fie un cerc cu centrul în punctul O și rază R și A un punct situat la distanța d de centrul O (Fig. 2.12). O secantă oarecare care trece prin punctul A intersectează cercul în punctele B și C. Se numește putere a punctului A față de cerc, produsul mărimii segmentelor AB și AC. Puterea este aceeași oricare ar fi secanta dusă prin punctul A și este egală cu $d^2 - R^2$, deci avem

$$[AB]\,[AC] = d^2 - R^2 = AO^2 - R^2.$$

Cum măsurile celor două segmente sînt de același semn sau de semne contrare, după cum punctul A este exterior sau interior cercului dat, puterea unui punct față de un cerc este pozitivă, nulă sau negativă, după cum punctul este exterior cercului, pe cerc, sau interior cercului. În cazul cînd punctul este exterior cercului, poziția extremă a secantei este tangenta AT la cerc. Rezultă că puterea punctului este AT^2.

Reciproc, dacă pe două drepte ce trec printr-un punct A, luăm punctele B, C, B_1, C_1, așa ca $[AB]\,[AC] = [AB_1]\,[AC_1]$, cele patru puncte sînt pe un cerc.

Se numește axă radicală a două cercuri, locul geometric al punctelor care au aceeași putere față de cele două cercuri. Axa radicală este o dreaptă perpendiculară pe linia centrelor. Notînd cu A un punct al axei radicale, cu O_1 ,O_2 centrele celor două cercuri, cu R_1, R_2 razele lor, cu D mijlocul distanței centrelor și cu H intersecția axei radicale cu linia centrelor (Fig. 2.13), din egalitatea puterilor punctului A față de cele două cercuri $AO_1^2 - R_1^2 = AO_2^2 - R_2^2$, deducem $R_1^2 - R_2^2 = AO_1^2 - AO_2^2 = 2DH \cdot O_1O_2$ (§3.1.3.3), de unde rezultă poziția punctului H.

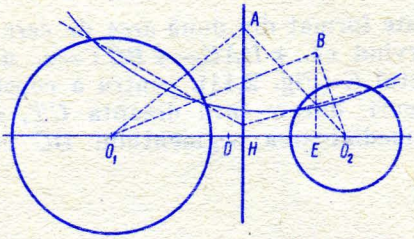


Fig. 2.13

Observații. 1° Dacă cercurile sînt concentrice ele nu au axă radicală. Se zice uneori că este aruncată la infinit.

2° Dacă cercurile se intersectează, axa radicală trece prin punctele de intersecție. Dacă cercurile sînt tangente, tangenta în punctul lor comun este axa radicală.

3° Locul geometric al punctelor din care se pot duce tangente egale la două cercuri este porțiunea axei radicale exterioară celor două cercuri. În particular, orice tangentă comună la două cercuri este împărțită de axa radicală în două părți egale.

4° În cazul cînd un cerc este interior celuilalt, axa radicală este exterioară cercurilor și se depărtează de ele odată cu apropierea centrelor lor.

5° În cazul cînd un cerc se reduce la un punct — centrul său — puterea față de cerc devine pătratul distanței de la punctul dat la centrul cercului și noțiunea de axă radicală se poate menține.

6° Diferența puterilor unui punct B față de două cercuri, cu notațiile din fig. 2.13, este egală cu $2HE \cdot O_1O_2$, deci de două ori distanța punctului la axa radicală înmulțită cu distanța centrelor celor două cercuri.

7° Porțiunea exterioară din axa radicală a două cercuri este locul geometric al centrelor cercurilor ortogonale cercurilor date.

Dacă centrele a trei cercuri nu sînt în linie dreaptă, axele radicale ale acestor cercuri, luate două cîte două, sînt concurente într-un anumit punct, numit *centru radical*. Dacă centrele sînt pe o dreaptă, cele trei axe radicale sînt paralele și dacă două coincid, cu ele coincide și a treia axă radicală. Ținînd seama de această noțiune, construcția axei radicale a două cercuri nesecante (exterioare unul altuia, sau unul interior celuilalt) se face intersectîndu-le cu un al treilea cerc. Se obțin astfel două noi axe radicale care trebuie să se întîlnească pe prima axă radicală (Fig. 2.13).

2.5. POL ȘI POLARĂ ÎN RAPORT CU UN CERC

Dacă dintr-un punct P din planul unui cerc cu centrul O și raza R, ducem o secantă variabilă care intersectează cercul în punctele A și B (Fig. 2.14), locul geometric al punctului Q, conjugatul armonic al punctului P față de segmentul AB, este o dreaptă Δ, numită *polara* punctului P față de cercul O. De asemenea punctul P se numește *polul* dreptei Δ față de cercul O.

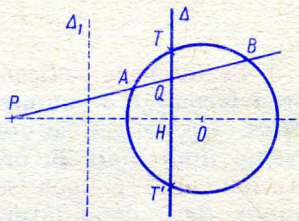


Fig. 2.14

Dacă punctul P este exterior cercului, polara taie cercul în punctele T și T', așa că PT și PT' sînt tangentele din P la cerc. Notînd cu H intersecția polarei cu diametrul cercului ce trece prin P, avem $OP \cdot OH = R^2$. Dacă punctul P este interior cercului, polara este exterioară cercului. Dacă punctul P este pe cerc, polara este tangenta la cerc în acel punct, iar dacă punctul P coincide cu centrul cercului, polara este aruncată la infinit. Mijlocul segmentului PQ, descrie o dreaptă Δ_1, care este axul radical al cercului și al punctului P.

Teorema următoare este fundamentală și o enunțăm în trei feluri.

Polarele tuturor punctelor unei drepte, trec prin polul acelei drepte. Invers, polii tuturor dreptelor care trec printr-un punct sînt situați pe polara acestui punct.

Dacă un punct Q este situat pe polara punctului P, atunci punctul P este situat pe polara punctului Q. Cele două *puncte* P și Q sînt *conjugate față de cerc*.

Dacă o dreaptă Δ' trece prin polul unei drepte Δ, atunci dreapta Δ trece prin polul dreptei Δ'. Cele două *drepte* se numesc *conjugate față de cerc.*

2.6. LUNGIMEA UNUI CERC, ARIA UNUI CERC, SECTOR DE CERC ȘI SEGMENT DE CERC

Lungimea unui cerc de rază R, este $2\pi R$. Cercul împarte planul în două regiuni, una interioară — numită tot cerc sau disc — și alta exterioară. Pentru măsurarea discului circular se introduce noțiunea de arie (la fel ca și la poligoane, §3). Aria unui cerc de rază R este πR^2, a unui *sector de cerc* de unghi α, $\frac{\pi R^2 \alpha}{360°}$ și a unui *segment de cerc* de unghi α este $R^2\left(\frac{\pi\alpha}{360°} - \frac{\sin 2\alpha}{2}\right)$.

3. POLIGOANE

Se numește *poligon* o linie frîntă închisă (Fig. 3.1). Segmentele care-l formează se numesc *laturi*, iar extremitățile acestora se numesc *vîrfuri.* Un poligon se notează cu literele care desemnează vîrfurile lui, acestea fiind luate în ordinea în care apar în linia frîntă. Lungimea laturilor unui poligon se numește *perimetru.* Un poligon se numește *simplu*, dacă două laturi oarecare neadiacente nu au nici un punct comun (Fig. 3.1, a,b). Un poligon simplu împarte planul în două regiuni, una *interioară* poligonului și alta *exterioară* (Regiunea interioară se numește *placă poligonală* sau uneori tot poligon). Unghiurile formate de două laturi consecutive și situate în regiunea interioară, se numesc *unghiurile* poligonului. După numărul unghiurilor poligonul se numește *triunghi* (3), *patrulater* (4), *pentagon* (5), *hexagon* (6), *heptagon* (7), *octogon* (8), *decagon* (10), *dodecagon* (12), *pentadecagon* (15) etc. Orice dreaptă

Fig. 3.1

care unește două vîrfuri neconsecutive ale unui poligon se numește *diagonală*. Un poligon se numește *convex*, dacă prelungind oricare dintre laturile sale, niciuna nu intersectează laturile nealăturate (Fig. 3.1.a). În caz contrar poligonul se numește *concav* (Fig. 3.1.b, c,d). Într-un poligon convex, în interiorul oricărui unghi, se găsesc vîrfurile tuturor celorlalte unghiuri.

Perimetrul unui poligon convex este mai mic decît perimetrul unei linii poligonale închise, care-l înconjoară.

Dacă toate vîrfurile unui poligon se găsesc pe un cerc, poligonul se zice *înscris* în acel cerc. Dacă laturile unui poligon sînt tangente la un cerc, poligonul se zice *circumscris* cercului.

Un poligon convex care are toate laturile egale și toate unghiurile egale, se numește *poligon regulat*. Un poligon regulat poate să fie simplu sau nu. În al doilea caz el se numește *poligon regulat stelat*.

Suma unghiurilor unui poligon convex cu n laturi, este egală cu $(n-2)\,180°$. În particular, suma unghiurilor unui triunghi este egală cu 180°, iar pentru un patrulater suma este 360°.

Unghiul format de o latură a unui poligon și prelungirea unei laturi alăturate se numește *unghi exterior* al poligonului. Parcurgînd perimetrul unui poligon convex într-un anumit sens și prelungind pe rînd fiecare latură (Fig. 3.2), suma unghiurilor exterioare astfel formate este egală cu patru unghiuri drepte.

Două poligoane cu același număr de laturi se numesc *poligoane asemenea* dacă unghiurile sînt două cîte două egale și dacă laturile omoloage sînt proporționale. Astfel dacă poligoanele $ABCDE$ și $A'B'C'D'E'$ sînt asemenea (Fig. 3.3), avem

$$\sphericalangle A = \sphericalangle A',\ \sphericalangle B = \sphericalangle B',\ \sphericalangle C = \sphericalangle C',\ \sphericalangle D = \sphericalangle D',\ \sphericalangle E = \sphericalangle E'$$

și

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'}.$$

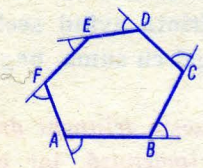


Fig. 3.2

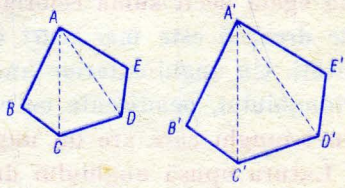


Fig. 3.3

Tl. 3—31

Două poligoane asemenea se pot descompune în triunghiuri două cîte două asemenea.

Două poligoane se zic *poligoane egale*, dacă unghiurile și laturile sînt două cîte două egale.

Pentru măsurarea plăcilor poligonale se introduce noțiunea de *arie*, care este un număr atașat plăcii astfel încît două plăci egale au arii egale, iar dacă placa se descompune într-o sumă de plăci, aria ei este suma ariilor plăcilor componente. Ca *unitate de arie* se ia aria unui pătrat cu latura egală cu unitatea de lungime.

Ariile domeniilor plane care nu sînt mărginite de poligoane, se definesc printr-un proces de trecere la limită a unui șir de poligoane care aproximează din ce în ce mai bine frontiera domeniului.

Două figuri care au aceeași arie se numesc *echivalente*. Două figuri egale sînt evident echivalente, dar două figuri echivalente nu sînt neapărat egale. Astfel un pătrat poate fi echivalent cu un triunghi.

Ariile a două poligone asemenea sînt proporționale cu pătratele a două laturi omoloage.

3.1. TRIUNGHIURI

În cazul cînd un triunghi are două laturi egale el se numește *isoscel* (a treia latură se numește uneori bază), iar dacă are toate laturile egale se numește *echilateral*. Suma unghiurilor unui triunghi este egală cu 180°. Într-un triunghi isoscel, unghiurile ce se opun laturilor egale sînt egale. Într-un triunghi echilateral toate unghiurile sînt egale cu 60°. În orice triunghi laturii celei mai mari îi corespunde unghiul cel mai mare. De asemenea dacă laturile unui triunghi sînt a, b și c avem

$$a-b \leqslant c \leqslant a+b, \quad (a \geqslant b)$$

deci o latură este mai mare sau egală decît diferența celorlalte și mai mică sau egală decît suma celorlalte două. Rezultă de aici că un segment de dreaptă este mai scurt decît orice linie frîntă avînd aceleași extremități. Un unghi exterior unui triunghi este egal cu suma unghiurilor triunghiului, neadicente cu el.

Un triunghi care are un unghi drept, se numește *triunghi dreptunghic*. Latura opusă unghiului drept se numește *ipotenuză*, iar celelalte două se numesc *catete*. Unghiurile ascuțite ale unui triunghi dreptunghic sînt complementare.

Într-un triunghi oarecare se pot duce următoarele drepte importante:

bisectoarea AD a unghiului A

mediana AE dusă din vîrful A

înălțimea AF dusă din vîrful A

mediatoarea EG *a laturii* BC (perpendiculara ridicată pe mijlocul laturii) (Fig. 3.4). Punctele D,E,F se numesc picioarele bisectoarei, medianei și înălțimii unghiului A.

Simediana AH (simetrica medianei față de bisectoarea interioară)

dreptele izogonale, sînt două drepte care trec prin vîrful unghiului unui triunghi și sînt simetrice față de bisectoarea unghiului. Astfel simediana este izogonală cu mediana corespunzătoare aceluiași vîrf.

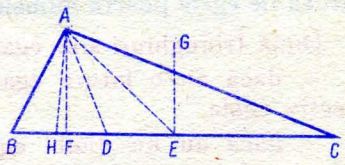


Fig. 3.4

Bisectoarele unui triunghi se întîlnesc în *centrul cercului înscris* triunghiului ABC.

Mediatoarele unui triunghi se întîlnesc în *centrul O al cercului circumscris* triunghiului.

Medianele se întîlnesc în *centrul G de greutate* al triunghiului. Acesta se găsește la 2/3 din lungimea fiecărei mediane, măsurată de la vîrf.

Într-un triunghi dreptunghic mediana unghiului drept este jumătate din ipotenuză.

Înălțimile se întîlnesc într-un punct H numit *ortocentru* (provenind de la cuvîntul grecesc orthos, care înseamnă drept, deoarece înălțimile fac unghiuri drepte cu laturile triunghiului).

Simedianele unui triunghi sînt concurente în punctul lui *Lemoine*.

Într-un triunghi isoscel:

înălțimea corespunzătoare bazei este și mediană și bisectoare și mediatoare,

înălțimile corespunzătoare extremităților bazei sînt egale și analog pentru bisectoare și mediane.

Se definesc de asemenea *bisectoarele unghiurilor exterioare* ale unui triunghi. Bisectoarea interioară a unui unghi și bisectoarele exterioare ale celorlalte două unghiuri sînt concurente (fig. 3.5). Se observă că în

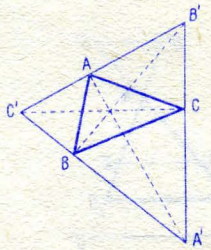


Fig. 3.5

triunghiul $A'B'C'$ format cu bisectoarele exterioare ale unghiului unui triunghi ABC, înălțimile sînt bisectoarele interioare ale triunghiului ABC.

Dreapta care unește mijloacele a două laturi se numește *linie mijlocie*. Ea este paralelă cu latura a treia și este egală cu jumătatea acesteia.

Într-un triunghi dreptunghic simediana unghiului drept coincide cu înălțimea și punctul lui Lemoine este la mijlocul acestei înălțimi.

Următoarele condiții necesare și suficiente pentru ca două triunghiuri să fie egale poartă numele de *cazurile de egalitate ale triunghiurilor.*

Două triunghiuri sînt egale

— dacă au o latură egală și unghiurile alăturate acestei laturi respectiv egale,

— dacă au un unghi egal cuprins între laturi respectiv egale,

— dacă au toate laturile respectiv egale.

Două triunghiuri dreptunghice sînt egale,

— dacă au o latură și un unghi ascuțit respectiv egale,

— dacă au două laturi respectiv egale.

3.1.1. Teoreme

1° *Teorema lui Tales.* Orice paralelă la o latură a unui triunghi determină pe celelalte două laturi segmente ale căror măsuri sînt proporționale și reciproc. Prin urmare dacă în triunghiul ABC ducem paralela DE la latura BC (Fig. 3.6) avem

$$\frac{DA}{DB} = \frac{EA}{EC}$$

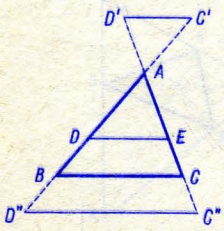


Fig. 3.6

indiferent dacă dreapta DE taie laturile triunghiului sau prelungirile lor. Lungimile segmentelor determinate sînt în același raport ca și lungimile laturilor AB și AC.

Din teorema precedentă rezultă că trei drepte paralele determină pe două drepte oarecare segmente ale căror măsuri sînt proporționale.

2° *Teorema bisectoarei.* a) Bisectoarea unghiului unui triunghi, împarte latura opusă în două segmente de sensuri contrarii a căror

lungimi sînt proporționale cu laturile ce mărginesc unghiul. b) Bisectoarea exterioară a unui unghi al unui triunghi împarte latura opusă în două segmente, de același sens, proporționale cu laturile care mărginesc unghiul.

Are loc și proprietatea reciprocă, deci dacă o dreaptă care trece printr-un vîrf al unui triunghi, împarte latura opusă în segmente ale căror lungimi sînt proporționale cu laturile care mărginesc unghiul, dreapta este bisectoare a unghiului și anume: interioară, dacă segmentele au sensuri contrare și exterioară, în caz contrar.

Pentru triunghiul ABC, dacă bisectoarele sînt AD și AE avem (Fig. 3.7)

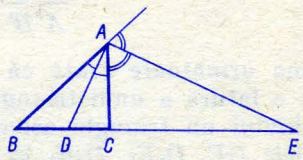


Fig. 3.7

$$\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC} \text{ și } \frac{EB}{EC}=\frac{AB}{AC}.$$

Ținînd seama de măsurile segmentelor de pe latura BC, avem

$$\frac{[DB]}{[DC]}=-\frac{[EB]}{[EC]}$$

deci picioarele bisectoarelor unghiului A sînt conjugate armonic cu vîrfurile B și C. Așa că într-un triunghi laturile unui unghi și bisectoarele unghiului, formează un fascicol armonic (§1.1.3). Rezultă de aici că:

Locul geometric al punctelor ale căror distanțe la două puncte fixe B, C sînt într-un raport dat $(m\neq 1)$, este un cerc cu centrul pe dreapta BC și pe care o taie în două puncte D și E (Fig. 3.7), așa ca

$$\frac{[DB]}{[DC]}=-\frac{[EB]}{[EC]}=m.$$

3° Într-un triunghi, dreapta care unește picioarele a două înălțimi este antiparalelă cu a treia.

3.1.2. Asemănarea triunghiurilor

Două triunghiuri ABC și $A'B'C'$ sînt asemenea dacă unghiurile sînt două cîte două egale și dacă laturile omoloage sînt proporționale

(laturile omoloage sînt cele care se opun la două unghiuri egale) (Fig. 3.8), deci dacă

$$\sphericalangle A = \sphericalangle A',$$
$$\sphericalangle B = \sphericalangle B',$$
$$\sphericalangle C = \sphericalangle C'$$

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}.$$

Teorema următoare arată că *există* triunghiuri asemenea: orice paralelă la o latură a unui triunghi, determină cu celelalte două laturi ale triunghiului un triunghi asemenea cu cel dat (Fig. 3.8). În figura 3.9 paralelele DE, D_1E_1, D_2E_2 la latura BC, determină triunghiurile ADE, AD_1E_1, și AD_2E_2, fiecare asemenea cu triunghiul ABC.

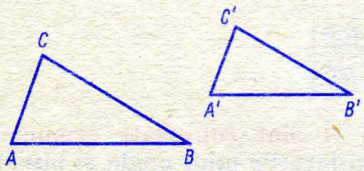


Fig. 3.8

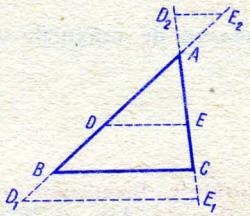


Fig. 3.9

Avem următoarele *cazuri de asemănare a două triunghiuri* (fiecare reprezentînd condiții necesare și suficiente) (Fig. 3.10).

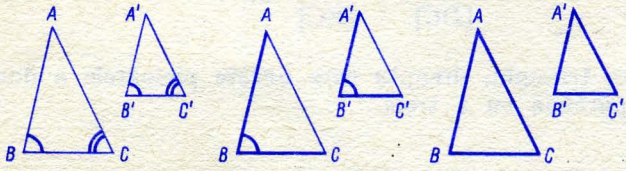


Fig. 3.10

1° Două triunghiuri sînt asemenea dacă au două unghiuri respectiv egale.

2°. Două triunghiuri sînt asemenea dacă au un unghi egal, cuprins între laturi proporționale. (Triunghiurile nu sînt asemenea dacă unghiul egal nu este cuprins între laturile proporționale).

3° Două triunghiuri sînt asemenea dacă au laturile omoloage proporționale.

Ținînd seama de proprietățile unghiurilor care au laturile paralele sau perpendiculare, rezultă că două triunghiuri care au laturile omoloage respectiv paralele, sau perpendiculare, sînt asemenea.

În cazul particular al triunghiurilor dreptunghice, două triunghiuri sînt asemenea dacă

— au un unghi ascuțit egal,
— două laturi omoloage proporționale.

3.1.3. Relații metrice într-un triunghi

Printr-o relație metrică între mai multe lungimi se înțelege o relație între numerele care măsoară aceste lungimi, unitatea fiind aceeași pentru toate lungimile. Pentru prescurtarea exprimării vom spune latura, pătratul laturii, produsul a două laturi ale unui triunghi, în loc de numărul care măsoară latura, de pătratul acestui număr, sau de produsul numerelor care măsoară laturile.

În continuare vom utiliza sistematic pentru triunghiul ABC, pentru unghiuri notațiile A, B, C, iar pentru laturi notațiile $a=BC$, $b=CA$ și $c=AB$.

3.1.3.1. Teorema lui Pitagora (Fig. 3.11). Să considerăm triunghiul ABC, *dreptunghic* în A. *Catetele* lui sînt $AB=c$ și $AC=b$, iar *ipotenuza* $BC=a$. Ducînd înălțimea $AD=h$ și notînd cu $BD=c'$, $DC=b'$, proiecțiile catetelor pe ipotenuză, avem următoarele propoziții:

— triunghiurile dreptunghice ABD și ADC sînt asemenea între ele și asemenea fiecare cu triunghiul ABC,

— fiecare catetă este medie proporțională între ipotenuză și proiecția ei pe ipotenuză, deci

$$b^2=ab', \quad c^2=ac',$$

— înălțimea dusă din unghiul drept este medie proporțională între segmentele pe care le determină pe ipotenuză, deci

$$h^2=b'c',$$

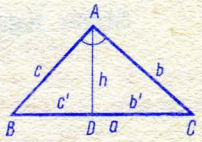


Fig. 3.11

— pătratul ipotenuzei este egal cu suma pătratelor catetelor (teorema lui *Pitagora*), deci

$$a^2=b^2+c^2.$$

Pentru un triunghi oarecare avem

3.1.3.2. *Teorema lui Pitagora generalizată:* pătratul unei laturi BC este egal cu suma pătratelor celorlalte laturi din care se scade sau se adună dublul produs al uneia din laturi, de exemplu AC cu proiecţia pe ea a celeilalte laturi, după cum unghiul A este ascuţit, respectiv obtuz. **Notînd cu BD înălţimea vîrfului B, avem (fig. 3.12)**

$$BC^2=AB^2+AC^2-2AC\cdot AD \quad (\sphericalangle A \text{ ascuţit})$$

$$BC^2=AB^2+AC^2+2AC\cdot AD \quad (\sphericalangle A \text{ obtuz})$$

Utilizînd măsurile segmentelor avem o singură formulă

$$BC^2=AB^2+AC^2-2[AC]\cdot[AD].$$

3.1.3.3. *Teorema medianei.* Suma pătratelor a două laturi ale unui triunghi este egală cu de două ori pătratul jumătăţii celeilalte laturi adunat cu de două ori pătratul medianei corespunzătoare aceleiaşi laturi, **deci (Fig. 3.13), notînd cu D mijlocul laturii BC, avem**

$$AB^2+AC^2=2BD^2+2AD^2.$$

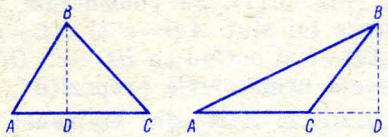


Fig. 3.12

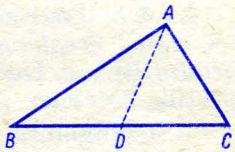


Fig. 3.13

Strîns legate de această teoremă sînt proprietăţile:

— Locul geometric al punctelor astfel ca suma pătratelor distanţelor la două puncte fixe să fie constantă este un cerc cu centrul în mijlocul segmentului determinat de cele două puncte fixe.

— Diferenţa pătratelor a două laturi ale unui triunghi este egală cu de două ori produsul dintre a treia latură cu proiecţia pe această latură

a medianei care-i corespunde. Astfel în triunghiul ABC (Fig. 3.14) AD este mediana laturei BC, iar DE este proiecția ei pe aceeași latură. Avem

$$AB^2-AC^2=2BC\cdot DE.$$

— Locul geometric al punctelor astfel ca diferența pătratelor distanțelor la două puncte fixe să fie constantă este o perpendiculară la dreapta ce unește punctele fixe.

3.1.3.4. Teorema lui Stewart. Dacă D este un punct pe latura BC a unui triunghi ABC (Fig. 3.15), avem

$$AB^2\cdot DC+AC^2\cdot BD-AD^2BC=BC\cdot BD\cdot DC.$$

În formula precedentă intervin lungimile segmentelor. Considerînd măsurile segmentelor de pe latura BC, avem formula

$$AB^2\cdot[CD]+AC^2\cdot[DB]+AD^2\cdot[BC]+[BC]\cdot[CD]\cdot[DB]=0.$$

Măsurile celor trei segmente se succed de două ori, așa cum se arată în schema din fig. 3.16. Formula fiind simetrică față de punctele B,C,D rămîne valabilă oricare ar fi poziția punctului D, între punctele B și C sau în afara lor.

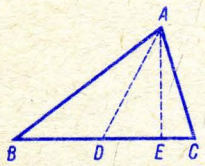


Fig. 3.14

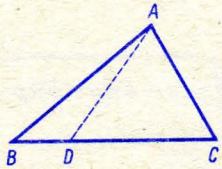


Fig. 3.15

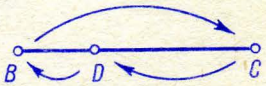


Fig. 3.16

3.1.3.5. Alte teoreme legate de cercul circumscris unui triunghi.

1° Produsul a două laturi ale unui triunghi, este egal cu produsul diametrului cercului circumscris triunghiului, cu înălțimea corespunzătoare celeilalte laturi. Cu notațiile din fig. 3.17, avem

$$AB\cdot AC=2R\cdot AH,$$

unde $2R=AD$.

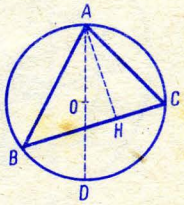


Fig. 3.17

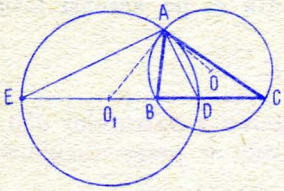


Fig. 3.18

2° Teorema lui *Apoloniu*: Cercul lui Apoloniu al cărui diametru este segmentul DE, format de picioarele bisectoarelor unghiului A pe latura opusă a unui triunghi ABC (Fig. 3.18), este ortogonal cercului circumscris triunghiului. Centrul cercului lui Apoloniu este la intersecția tangentei în vîrful A la cercul circumscris, cu latura BC.

3°. **Cercul celor nouă puncte (cercul lui Euler), referitor la triunghiul ABC, trece prin mijloacele laturilor, prin picioarele înălțimilor și prin mijloacele distanțelor dintre vîrfuri și ortocentrul H** (Fig. 3.19). Centrul lui se găsește în punctul ω, mijlocul segmentului HO, O fiind centrul cercului circumscris triunghiului și raza lui este jumătate din raza cercului circumscris. Centrul de greutate G al triunghiului ABC se găsește la intersecția medianei AA'' cu OH. Cercul circumscris și cercul lui Euler au ca centru de omotetie directă pe H și omotetie inversă pe G (§ 5.4).

3.1.3.6. Lungimile unor segmente importante dintr-un triunghi.

Notînd semiperimetrul unui triunghi ABC cu $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ avem (Fig. 3.20)

înălțimea

$$AH=\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

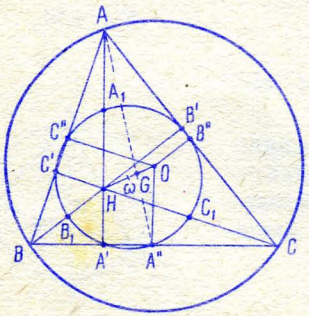


Fig. 3.19

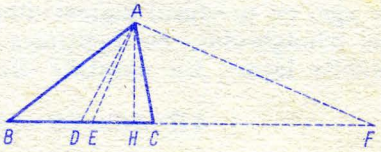


Fig. 3.20

de unde se obține *formula lui Heron* pentru aria S a triunghiului

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

mediana

$$AD=\sqrt{\frac{2b^2+2c^2-a^2}{2}},$$

bisectoarea interioară a unghiului A,

$$AE^2=bc\frac{(b+c)^2-a^2}{(b+c)^2}=\frac{4\,bc\,p(p-a)}{(b+c)^2},$$

bisectoarea exterioară a unghiului A

$$AF^2=bc\frac{a^2-(c-b)^2}{(c-b)^2},$$

raza cercului circumscris *unui triunghi* ABC

$$R=\frac{bc}{2\,AH}=\frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}=\frac{abc}{4S},$$

unde AH este înălțimea corespunzătoare vîrfului A,

triunghiului ABC

$$r=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}=\frac{S}{p}.$$

raza cercului exînscris triunghiului ABC și situat în interiorul unghiului A,

$$r_a=\sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}}=\frac{S}{p-a}.$$

Avem analog celelalte două raze ale cercurilor exînscrise

$$r_b=\sqrt{\frac{p(p-a)(p-c)}{p-b}}=\frac{S}{p-b},\quad r_c=\sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)}{p-c}}=\frac{S}{p-c}.$$

Avem formula

$$S=\sqrt{r\,r_a r_b r_c}.$$

Lungimile segmentelor determinate pe laturile unui triunghi ABC de cercul înscris și de cercul exînscris în interiorul unghiului A, sînt

$$AE=AF=p-a,\ BF=BD=p-b,\ CD=CE=p-c$$

respectiv

$$AG=AH=p,\ BG=BD_1=p-c,\ CD_1=CH=p-b,$$

unde D, E și F sînt punctele de tangență ale cercului înscris cu laturile BC, CA și AB, iar G, D_1 și H sînt punctele de tangență ale cercului exînscris din interiorul unghiului A, cu laturile AB, BC și AC.

3.1.4. Transversale

Teorema lui Menelaus. Dacă o dreaptă taie laturile AB, BC și CA ale unui triunghi respectiv în punctele C', A', B' (Fig. 3.21), între segmentele determinate pe laturi avem relația

$$\frac{[A'B]}{[A'C]}\cdot\frac{[B'C]}{[B'A]}\cdot\frac{[C'A]}{[C'B]}=1.$$

Reciproc, dacă punctele A', B', C' sînt luate respectiv pe laturile BC, CA, AB ale unui triunghi ABC și dacă are loc relația precedentă, cele trei puncte sînt situate pe o dreaptă (*coliniare*).

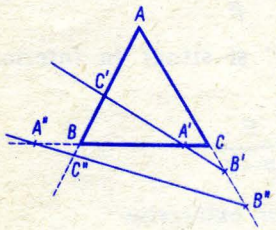


Fig. 3.21

Dreapta $A'B'C'$ se numește *transversală* și ea poate să taie două din laturile triunghiului sau numai prelungirile acestora. Indiferent de sensul direct ales pe laturile triunghiului, două, respectiv nici unul, dintre rapoartele din formula de mai sus sînt negative, după cum se vede și din figura alăturată. (Fig. 3.21).

Reciproca teoremei lui Menelaus se utilizează deseori pentru a arăta că trei puncte sînt în linie dreaptă. Ca exemplu, avem teorema lui *Pascal*: În orice hexagon înscris într-un cerc, punctele de intersecție ale laturilor opuse (din trei în trei) sînt coliniare. În particular, dacă vîrfurile hexagonului coincid două cîte două, rezultă că tangentele duse în vîrfurile unui triunghi la cercul circumscris, taie laturile corespunzătoare în trei puncte coliniare.

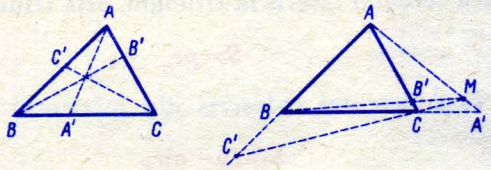


Fig. 3.22

Teorema lui Ceva. Dacă prin vîrfurile unui triunghi ABC se duc trei drepte concurente care întîlnesc laturile triunghiului în punctele A', B', C' (Fig. 3.22), determină şase segmente aşa ca

$$\frac{[A'B]}{[A'C]}\,\frac{[B'C]}{[B'A]}\,\frac{[C'A]}{[C'B]}=-1.$$

Reciproc, dacă pe fiecare din laturile AB, BC şi CA ale triunghiului luăm respectiv punctele C', A', şi B', aşa ca să avem relaţia precedentă, dreptele AA', BB', CC' sînt concurente. Această teoremă este frecvent utilizată pentru a dovedi concurenţa a trei drepte.

3.1.5. Aria triunghiului

Aria unui triunghi este egală cu produsul dintre una din laturi (numită bază) cu jumătate din înălţimea corespunzătoare acestei laturi. **Rezultă**

— **două triunghiuri care au aceeaşi bază şi aceeaşi înălţime sînt echivalente, deci dacă se deplasează un vîrf al unui triunghi pe o paralelă la latura opusă se obţine un triunghi echivalent cu cel iniţial,**

— **ariile a două triunghiuri care au aceeaşi bază sînt proporţionale cu înălţimile lor.**

— **ariile a două triunghiuri care au aceeaşi înălţime sînt proporţionale cu bazele lor,**

— aria unui triunghi se exprimă în funcţie de laturile a, b, c cu formula lui *Heron* (§ 2.1.3.4).

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},\quad 2p=a+b+c.$$

Înlocuind perimetrul găsim

$$16S^2=2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-a^4-b^4-c^4.$$

Dacă r este raza cercului înscris în triunghi, aria triunghiului este dată de

$$S=pr,$$

dacă r_a este raza cercului exînscris din interiorul unghiului A, avem

$$S=(p-a)r_a$$

iar dacă R este raza cercului circumscris triunghiului, avem

$$S=\frac{abc}{4R};$$

în fine, mai avem formula

$$S=\sqrt{rr_ar_br_c}.$$

— ariile a două triunghiuri care au un unghi egal sau suplimentar sînt proporționale cu produsele laturilor care mărginesc acele unghiuri. Astfel în fig. 3.23 triunghiurile ABC și ADE au unghiul A comun, iar în fig. 3.24 unghiuri A suplimentare. În ambele cazuri avem

$$\frac{\text{aria } ABC}{\text{aria } ADE}=\frac{AB\cdot AC}{AD\cdot AE}.$$

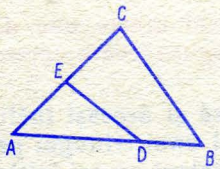


Fig. 3.23

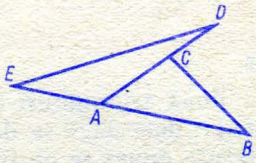


Fig. 3.24

Rezultă că dacă două triunghiuri au un unghi egal sau suplimentar, ele sînt echivalente dacă produsele laturilor care mărginesc acele unghiuri sînt egale.

3.2. PATRULATERE CONVEXE

Se numește *trapez*, un patrulater convex în care două laturi numite baza mare și baza mică, sînt paralele. Segmentele care unesc două vîrfuri opuse se numesc *diagonale*. Dacă trapezul are un unghi drept el se numește

trapez dreptunghic, iar dacă laturile neparalele sînt egale, el se numește *trapez isoscel*. Un trapez în care laturile sînt două cîte două paralele se numește *paralelogram*. Oricare din laturile paralele se numește bază. Dacă paralelogramul are toate unghiurile egale (de 90°), el se numește *dreptunghi*, iar dacă are toate laturile egale se numește *romb*. Dacă paralelogramul are și unghiurile și laturile egale, el se numește *pătrat*.

Segmentul care unește mijloacele laturilor neparalele ale unui trapez (*linie mediană*) este paralelă la baze și egală cu semisuma lor.

Într-un palalelogram laturile opuse sînt egale. Reciproc, un patrulater convex este paralelogram dacă are laturile opuse două cîte două egale, sau dacă el are două laturi opuse egale și paralele.

Într-un paralelogram unghiurile opuse sînt egale și reciproc.

Diagonalele unui paralelogram se intersectează în mijlocul lor și reciproc.

Într-un dreptunghi diagonalele sînt egale și reciproc orice paralelogram în care diagonalele sînt egale este un dreptunghi.

Diagonalele unui romb sînt perpendiculare și reciproc, orice paralelogram în care diagonalele sînt perpendiculare este romb.

Într-un pătrat, diagonalele sînt egale și perpendiculare și reciproc, orice paralelogram în care diagonalele sînt egale și perpendiculare este un pătrat.

3.2.1. Teoreme

O condiție necesară și suficientă ca un patrulater convex să fie înscris într-un cerc, este ca să aibă două unghiuri opuse suplimentare. Ducînd diagonalele AC și BD ale patrulaterului $ABCD$ (Fig. 3.25) se formează unghiurile notate cu 1—8. Condiția precedentă se poate înlocui cu oricare din condițiile $\measuredangle 1 = \measuredangle 4$, $\measuredangle 2 = \measuredangle 7$, $\measuredangle 3 = \measuredangle 6$, $\measuredangle 5 = \measuredangle 8$.

O altă condiție necesară și suficientă ca un patrulater convex să fie inscriptibil este ca produsul diagonalelor să fie egal cu suma produselor laturilor opuse, deci cu notațiile din figura alăturată, dacă $BD \cdot AC = AB \cdot CD + BC \cdot DA$ (Teorema lui *Ptolemeu*) (Fig. 3.25). (În cazul cînd patrulaterul este concav, produsul diagonalelor este egal cu valoarea absolută a diferenței produselor laturilor opuse).

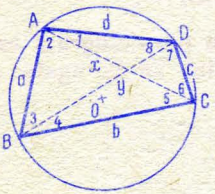


Fig. 3.25

Observații. **1°. Teorema lui Ptolemeu rămîne valabilă dacă cele patru puncte A, B, C, D**

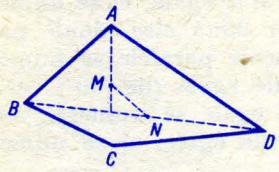


Fig. 3.26

într-o anumită ordine se găsesc pe o dreaptă. Ea se scrie cu măsurile segmentelor

$$[AB]\cdot[CD]+[AC]\cdot[DB]+[AD]\cdot[BC]=0.$$

2°. Raportul diagonalelor unui patrulater inscriptibil convex este egal cu raportul sumei produselor laturilor care converg în extremitățile diagonalelor, adică

$$\frac{AC}{BD}=\frac{AB\cdot AD+CB\cdot CD}{BA\cdot BC+DA\cdot DC}.$$

3° Într-un patrulater neinscriptibil produsul diagonalelor este mai mic decît suma produselor laturilor opuse și mai mare decît valoarea absolută a diferenței celor două produse.

4° Formulele pentru unghiurile unui patrulater inscriptibil și pentru raza cercului circumscris, sînt date în § 11.7.

Teoremele precedente permit calculul diagonalelor unui patrulater inscriptibil, cînd se cunosc laturile lui. Astfel cu notațiile din figura 3.25, avem

$$xy=ac+bd,\quad \frac{x}{y}=\frac{ad+bc}{ab+cd},$$

de unde rezultă

$$x^2=\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd},\quad y^2=\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}.$$

Pentru orice patrulater, convex sau nu, avem propoziția: suma pătratelor laturilor unui patrulater este egală cu suma pătratelor diagonalelor la care se adaugă de patru ori pătratul segmentului care unește mijloacele diagonalelor. Avem deci (Fig. 3.26)

$$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2+4MN^2.$$

De aici rezultă că pentru ca un patrulater să fie un paralelogram este necesar și suficient ca suma pătratelor laturilor lui să fie egală cu suma pătratelor diagonalelor.

3.2.2. Patrulatere complete

Prelungind laturile opuse ale unui patrulater pînă la intersecția lor, se obține o figură geometrică cu șase vîrfuri, numită *patru-*

later complet. Astfel în figura 3.27, pornind de la patrulaterul $ABCD$, se obține patrulaterul complet $ABCDEF$. Orice dreaptă care unește două din cele șase vîrfuri se numește *diagonală* a patrulaterului complet. Avem trei asemenea diagonale. Avem proprietățile:

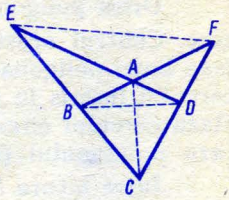


Fig. 3.27

— orice diagonală a unui patrulater complet, este împărțită armonic de celelalte două (*Pappus*),

— mijloacele celor trei diagonale ale unui patrulater complet sînt coliniare.

Utilizînd prima dintre teoremele precedente, avem rezultatul:

dacă patrulaterul $BEFD$ este înscris într-un cerc, intersecțiile laturilor EB cu FD și BD cu EF se găsesc pe polara față de cerc a punctului A, intersecția celor două diagonale.

3.2.3. Aria patrulaterelor convexe

Pentru a calcula aria unui patrulater oarecare (convex sau concav) el se împarte cu ajutorul unei diagonale în triunghiuri, sau se utilizează formula din § 11.7. Aria poligonului se obține adunînd sau scăzînd ariile unor triunghiuri sau patrulatere.

În particular:

— aria unui pătrat este egală cu pătratul laturei lui,

— aria unui romb este egală cu jumătate din produsul diagonalelor lui,

— aria unui dreptunghi este egală cu produsul a două laturi alăturate,

— aria unui paralelogram este egală cu produsul dintre bază și înălțime (distanța dintre cele două baze). Rezultă că două paralelograme care au aceeași bază și aceeași înălțime sînt echivalente.

— ariile a două paralelograme cu baze egale sînt proporționale cu înălțimile lor,

— aria unui trapez este egală cu produsul semisumei bazelor cu înălțimea trapezului (distanța dintre cele două baze). Aceeași arie este egală cu produsul dintre linia mediană cu înălțimea.

3.3. POLIGOANE REGULATE

Un poligon convex în care toate laturile sînt egale și toate unghiurile sînt egale, se numește *poligon regulat*. De asemenea, o linie frîntă care are toate laturile egale și toate unghiurile egale se numește *linie frîntă regulată*.

Orice poligon regulat poate fi înscris într-un cerc și circumscris unui cerc. Centrul acestor cercuri poartă denumirea de *centrul poligonului* (sau liniei poligonale). Distanța de la centru la o latură, care este și raza cercului înscris în poligon (sau în linia poligonală) se numește *apotemă*. Raza cercului circumscris poligonului (sau liniei poligonale) se numește raza poligonului (sau liniei poligonale).

Între latura l_n a poligonului regulat, raza r_n a lui și apotema a_n, avem relația

$$\frac{l_n^2}{4}+a_n^2=r_n^2, \text{ deci } a_n=\sqrt{\frac{4r_n^2-l_n^2}{2}}.$$

Se numește *unghi la centru al unui poligon* (sau al unei linii poligonale), unghiul format de două raze care mărginesc o latură. Dacă poligonul are n laturi, acest unghi este de $360°/n$.

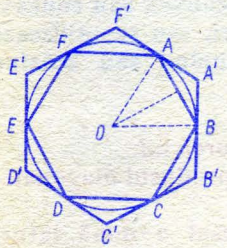


Fig. 3.28

Reciproc, împărțind un cerc într-un număr de părți egale și unind punctele de diviziune, obținem un poligon regulat. Ducînd apoi tangentele la cerc în punctele de diviziune se obține un alt poligon regulat circumscris cercului (Fig. 3.28). În felul acesta este dovedită existența poligonului regulat cu oricîte laturi.

Împărțind un cerc în n părți egale și unind punctele de diviziune din p în p, obținem un *poligon regulat stelat* cu n vîrfuri, numai dacă p este prim cu n (același poligon se obține dacă unim punctele din $n-p$ în $n-p$). Astfel primele poligoane regulate stelate sînt (Fig. 3.29): un pentagon, două heptagoane, un octogon, două nonagoane, un decagon etc.

Noțiunile de centru, apotemă, rază și unghi la centru, introduse mai sus, sînt valabile și pentru poligoanele stelate. Astfel unghiul la

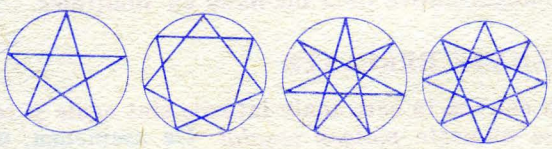


Fig. 3.29

centru al unui heptagon este de $\frac{360^\circ}{7}$ în timp ce unghiurile la centru ale celor două tipuri de heptagoane stelate sînt de $2\frac{360^\circ}{7}$ și $3\frac{360^\circ}{7}$.

Două poligoane regulate cu același număr de laturi sînt asemenea, raportul de asemănare fiind acela al laturilor lor sau al razelor lor, sau al apotemelor lor. Aceeași proprietate are loc pentru poligoanele regulate stelate cu același număr de laturi și de același tip, deci cu același unghi la centru.

Problema importantă referitoare la poligoanele regulate este găsirea relației dintre laturile lor și raza cercului circumscris, sau a cercului înscris. Din aceste relații rezultă și construcția geometrică a poligoanelor regulate. Avem următoarele teoreme generale:

1° Între latura l_n, raza r și apotema a_n a unui poligon regulat cu n laturi avem relația (Fig. 3.28)

$$\frac{l_n^2}{4}+a_n^2=r^2.$$

2° Între elementele l_n, a_n, ale poligonului regulat cu n laturi înscris într-un cerc cu raza r și elementele L_n, A_n ale poligonului regulat cu n laturi, circumscris aceluiași cerc, avem relațiile (Fig. 3.30)

$$\frac{r}{R}=\frac{l_n}{L_n}=\frac{a_n}{A_n},$$

unde R este raza celui de-al doilea poligon. Rezultă că avem

$$R=\frac{r^2}{a_n},\ L_n=\frac{l_n r}{a_n},\ A_n=r,$$

sau

$$r=A_n,\ l_n=\frac{A_n L_n}{R},\ a_n=\frac{A_n^2}{R},$$

care ne permite să trecem de la elementele poligonului înscris la cele ale poligonului circumscris aceluiași cerc și reciproc.

3° Între laturile l_n și l_{2n} ale poligoanelor cu n și $2n$ laturi înscrise într-un cerc cu raza r, avem relația (Fig. 3.31)

$$l_{2n}=\sqrt{2r^2-r\sqrt{4r^2-l_n^2}},$$

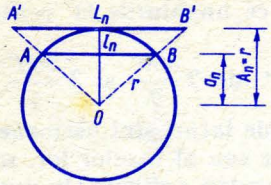


Fig. 3.30

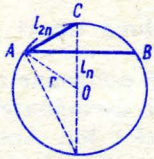


Fig. 3.31

iar între apoteme

$$a_{2n}=\sqrt{\frac{r(r+a_n)}{2}}.$$

Din punct de vedere geometric, dacă știm să înscriem într-un cerc un poligon regulat, știm să și circumscriem aceluiași cerc un poligon regulat cu același număr de laturi. Este suficient ca prin vîrfurile primului poligon să ducem tangente la cerc, așa cum s-a spus mai sus. De asemenea dacă se știe să se înscrie un poligon regulat într-un cerc, împărțind fiecare arc în două părți egale, putem obține poligonul cu un număr dublu de laturi.

3.3.1. Înscrierea într-un cerc a unui triunghi echilateral și a unui hexagon regulat.

Din triunghiul echilateral ACE (Fig. 3.32) avem

$$l_3=r\sqrt{3},\quad a_3=\frac{r}{2}.$$

Pornind de la triunghiul echilateral înscris, putem înscrie într-un cerc poligoanele regulate cu $3\cdot 2^n$ ($n=1, 2, \ldots$) laturi. Cu formulele din paragraful precedent putem obține laturile și apotemele acestor poligoane. Astfel pentru hexagon avem

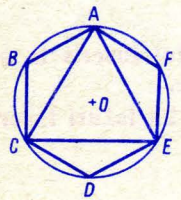


Fig. 3.32

$$l_6=r,\quad a_6=\frac{r\sqrt{3}}{2}.$$

Ținînd seama că latura hexagonului este egală cu raza cercului în care este înscris, rezultă că este suficient de a lua pe cerc șase arce consecutive cu corzile egale cu raza. Unind vîrfurile din două în două, obținem triunghiul echilateral.

3.3.2. Înscrierea într-un cerc a unui pătrat

Pentru găsirea celor patru vîrfuri este suficient să intersectăm cercul cu doi diametri perpendiculari (Fig. 3.33). Dacă raza cercului în care este înscris pătratul este r, avem

$$l_4 = r\sqrt{2},\quad a_4 = \frac{r}{2}\sqrt{2}.$$

Pornind de la pătratul înscris, putem înscrie într-un cerc poligoanele regulate cu 2^n, $n = 3, 4, \ldots$, laturi. Formulele precedente dau laturile și apotemele lor. Astfel pentru octogon, avem

$$l_8 = r\sqrt{2-\sqrt{2}},\quad a_8 = \frac{r}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}},$$

iar pentru poligonul regulat convex cu 2^n laturi

$$l_{2^n} = r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}},$$

$$a_{2^n} = \frac{r}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}},$$

în ambele formule fiind $n-1$ radicali suprapuși.

3.3.3. Înscrierea într-un cerc a pentagoanelor și decagoanelor regulate convexe sau stelate

Există două pentagoane și două decagoane regulate, cîte unul din fiecare fiind stelat (Fig. 3.34). Notînd cu r raza cercului în care sînt înscrise pentagoanele și decagoanele, avem

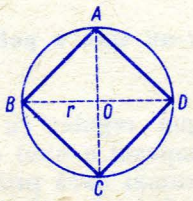


Fig. 3.33

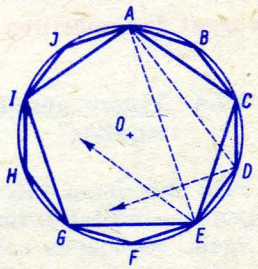


Fig. 3.34

$$l_5=\frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}},\ a_5=\frac{r}{4}(\sqrt{5}+1),$$

$$l'_5=\frac{r}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}},\ a'_5=\frac{r}{4}(\sqrt{5}-1),$$

$$l_{10}=\frac{r}{2}(\sqrt{5}-1),\ a_{10}=\frac{r}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}},$$

$$l'_{10}=\frac{r}{2}(\sqrt{5}+1),\ a'_{10}=\frac{r}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

Între laturile celor patru poligoane avem relațiile

$$l_5^2=l_{10}^2+r^2,\ l_5'^2=l_{10}'^2+r^2,$$

$$\frac{l_5}{l'_5}=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1),\ \frac{l_5}{l_{10}}=\frac{1}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

Lungimile laturilor celor două poligoane regulate, satisfac relațiile

$$l'_{10}-l_{10}=r,\qquad l_{10}\cdot l'_{10}=r^2,$$

deci pentru a construi geometric laturile decagonului regulat convex și stelat trebuie împărțită raza cercului în medie și extremă rație (§4.21). Luînd din două în două vîrfurile decagonului regulat convex, obținem vîrfurile pentagonului regulat convex. Pornind de la acesta putem înscrie într-un cerc poligoanele regulate cu $5\cdot 2^n$ ($n=1,2\ldots$) laturi.

Observație. Raportul dintre raza unui cerc și latura decagonului regulat convex înscris, $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, poartă denumirea de *secțiune de aur* și este legat de împărțirea unui segment în medie și extremă rație (§4.21).

3.3.4. Asupra posibilității de înscriere într-un cerc a poligoanelor regulate

Prin înscrierea într-un cerc a unui poligon regulat cu n laturi înțelegem posibilitatea împărțirii cu rigla și compasul a unui cerc în n părți egale. Asemenea construcții se pot face numai dacă problema se reduce din punct de vedere algebric la rezolvări de ecuații de gradul doi. Gauss a arătat că această construcție este posibilă dacă n este un

număr prim de forma $n=2^{2^p}+1$ ($p=0, 1, 2, \ldots$). Astfel de numere prime sînt 3, 5, 17, 257, 65537, ... Ţinînd seama de posibilitatea împărţirii cu rigla şi compasul a unui arc în două părţi egale, înseamnă că se pot înscrie în cerc poligoane regulate cu $n\cdot 2^p$ (p număr natural), dacă n este de forma precedentă.

Să arătăm că dacă ştim să înscriem într-un cerc poligonul cu r laturi şi cel cu s laturi, unde r şi s sînt prime între ele, putem înscrie şi poligonul cu rs laturi. În acest scop reamintim teorema din aritmetică: dacă numerele întregi r şi s sînt prime între ele, se pot determina în mod unic două numere întregi (pozitive sau negative) α şi β astfel ca

$$\alpha r+\beta s=1 \text{ (teorema lui Bézout)}$$

unde α şi β sînt respectiv mai mici decît s şi r. Deducem de aici

$$\frac{\alpha}{s}+\frac{\beta}{r}=\frac{1}{rs},$$

care pentru unghiurile la centru dintr-un cerc arată că suma a α unghiuri ale poligonului regulat cu s laturi şi a β unghiuri ale poligonului regulat cu r laturi, este egală cu unghiul la centru al poligonului regulat cu rs laturi, deci ştim să înscriem acest poligon regulat. Determinarea numerelor întregi α, β se face din algoritmul lui Euclid, referitor la numerele prime între ele r şi s

$$\begin{aligned}
r&=sq_1+r_1\\
s&=r_1q_2+r_2\\
r_1&=r_2q_3+r_3\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
r_{k-3}&=r_{k-2}q_{k-1}+r_{k-1}\\
r_{k-2}&=r_{k-1}q_k+1,
\end{aligned}$$

căci ultimul rest este egal cu unitatea. Pornind de la ultima relaţie şi eliminînd succesiv resturile parţiale $r_{k-1}, r_{k-2}, \ldots, r_1$ obţinute din celelalte relaţii, ajungem la relaţia lui Bézout.

Exemple: 1° Unghiul la centru al *dodecagonului* regulat este diferenţa dintre unghiurile la centru ale triunghiului echilateral şi ale pătratului, căci $12=3\cdot 4$ şi $4=3\cdot 1+1$, deci $1=4-3$ şi $\frac{1}{12}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$. (Construcţia dodecagonului regulat se face mai simplu pornind de la hexagonul regulat). Singurul dodecagon regulat stelat are un unghi

la centru de cinci ori mai mare (5 este singurul număr prim cu 12 și mai mic decît 6), deci pentru construcția geometrică directă a lui, avem de mai sus

$$\frac{5}{12}=\frac{5}{3}-\frac{5}{4}=\frac{2}{3}+1-\frac{1}{4}-1=\frac{2}{3}-\frac{1}{4},$$

deci unghiul la centru al dodecagonului regulat stelat se obține scăzînd unghiul la centru al pătratului din dublul unghiului la centru al triunghiului echilateral.

Laturile celor două dodecagoane regulate sînt

$$l_{12}=r\sqrt{2-\sqrt{3}},\quad l'_{12}=r\sqrt{2+\sqrt{3}}.$$

2° Pentru *pentadecagon* (15 laturi), avem $15=3\cdot 5$, deci algoritmul lui Euclid ne dă

$$5=3\cdot 1+2$$
$$3=2\cdot 1+1,$$

deci

$$1=3-2=3+3\cdot 1-5=2\cdot 3-5,$$

unde s-au culeș diferit factorii primi ai lui 15, pentru a putea urmări eliminarea resturilor parțiale. Deducem

$$\frac{1}{15}=\frac{2}{5}-\frac{1}{3},$$

așa că unghiul la centru al pentadecagonului regulat convex se obține scăzînd unghiul la centru al triunghiului echilateral din dublul unghiului la centru al pentagonului regulat convex.

Ținînd seama că numerele prime cu 15 și mai mici decît jumătatea lui sînt 2, 4 și 7, unghiurile la centru ale celor trei pentadecagoane regulate stelate se obțin din cele ale triunghiului echilateral și pentagonului, cu ajutorul relațiilor

$$\frac{2}{15}=\frac{4}{5}-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}$$

$$\frac{4}{15}=\frac{8}{5}-\frac{4}{3}=\frac{3}{5}-\frac{1}{3}$$

$$\frac{7}{15}=\frac{14}{5}-\frac{7}{3}=\frac{4}{5}-\frac{1}{3}.$$

Întrucît laturile hexagonului și decagonului se construiesc mai ușor decît cele ale triunghiului echilateral și pentagonului, s-a căutat o descompunere de forma

$$\frac{1}{15}=\frac{\gamma}{6}+\frac{\delta}{10}$$

unde trebuie să avem $10\gamma+6\delta=4$.. Se găsește

$$\frac{1}{15}=\frac{1}{6}-\frac{1}{10}$$

cu care de obicei se calculează latura pentadecagonului. În acest caz însă descompunerea nu mai este unică.

Laturile celor patru pentadecagoane regulate sînt

$$l_{15}=\frac{r}{4}\left[\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{3}\,(\sqrt{5}-1)\right],$$

$$l'_{15}=\frac{r}{4}\left[-\sqrt{10-2\sqrt{5}}+\sqrt{3}\,(\sqrt{5}+1)\right],$$

$$l''_{15}=\frac{r}{4}\left[\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{3}\,(\sqrt{5}-1)\right],$$

$$l'''_{15}=\frac{r}{4}\left[\sqrt{10-2\sqrt{5}}+\sqrt{3}\,(\sqrt{5}+1)\right].$$

În concluzie, înscrierea poligoanelor regulate convexe, sau stelate, este posibilă dacă numărul de laturi este de forma 2^n sau $2^n p_1 p_2, \ldots, p_k$, n fiind număr natural, iar $p_1, p_2, \ldots, p_k$ sînt numere prime de forma 2^n+1. Așa fiind, heptagonul nu poate fi înscris, căci 7 nu este de forma numerelor precedente. Nonagonul nu se poate construi, căci deși factorii sînt de această formă, ei coincid, deci nu sînt primi între ei. Aceste fapte rezultă și algebric, făcînd legătura cu rădăcinile de ordinul n ale unității (N. Ghircoiașiu — M. Iasinschi, Fișe de algebră), care se pot reprezenta grafic prin vîrfurile poligonului regulat cu n laturi înscris în cercul cu raza unu și centrul în origine. În cele două cazuri, rădăcinile sînt date de ecuațiile $x^7-1=(x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)=0$ și $x^9-1=(x^3-1)(x^6+x^3+1)=0$. Rezolvarea lor conduce la ecuații de gradul trei, în soluția cărora se știe că intervin radicali de ordinul trei, care nu se pot construi cu rigla și compasul.

Tf. 4-41

4. CONSTRUCȚII GEOMETRICE

Construirea figurilor plane, cu diferite instrumente, este o problemă deosebit de importantă a geometriei, care a apărut, odată cu primele ei rezultate teoretice, ca o verificare în practică a acestora. Este suficient să amintim că în proiectarea și execuția oricărui obiectiv tehnic trebuie să se facă un număr de construcții geometrice. Este importantă de asemenea utilizarea construcțiilor geometrice pentru a vedea dacă o problemă de geometrie teoretică sau aplicată are sau nu soluții, lucru în general mai simplu decît obținerea efectivă a soluțiilor.

Cele mai simple instrumente folosite în decursul timpului, au fost *rigla* și *compasul*, cu toate că încă din antichitate s-au imaginat și utilizat și alte instrumente. Totuși rigla și compasul continuă și astăzi să fie direct sau indirect la baza unor procedee tehnice curente dintre care unele foarte moderne, ca de exemplu cele utilizate în „controlul numeric" folosit în construcția de mașini și în care construcțiile simple geometrice sînt strîns legate de lucrul cu mașinile electronice de calcul.

4.1. CONSTRUCȚII CU RIGLA ȘI COMPASUL

Orice construcție cu rigla și compasul constă într-un șir finit de pași, de unul din tipurile

— trasarea unei drepte prin două puncte,

— aflarea intersecției a două drepte,

— trasarea unui cerc de rază dată și cu centrul într-un punct dat,

— aflarea punctelor de intersecție ale unui cerc cu un alt cerc, sau ale unui cerc cu o dreaptă.

Afară de acestea mai admitem și *echerul* pentru trasarea perpendicularelor sau paralelelor. (Echerul nu este socotit un instrument în plus, căci ceea ce realizăm cu el se poate construi cu rigla și compasul). Profilul unui echer este un triunghi dreptunghic, fie isoscel, fie avînd un unghi ascuțit de 30°. Pentru prescurtare vom zice cateta sau ipotenuza echerului, în loc de cateta sau ipotenuza profilului echerului.

Prin urmare rigla este folosită numai ca instrument de trasare a dreptelor, nu ca instrument de măsură sau de determinare a distanțelor.

În efectuarea construcțiilor geometrice trebuie să se țină seama de spațiul ce-l avem la dispoziție și să se evite pe cît posibil construcțiile care duc la erori mari, ca de exemplu determinarea unui punct ca intersecție a două drepte ce fac între ele un unghi mic, sau trasarea unei drepte prin două puncte prea apropiate.

Mai jos sînt date unele dintre construcţiile geometrice cele mai des întîlnite.

1° Perpendiculara pe mijlocul unui segment de dreaptă.

Din două puncte oarecare A şi B de pe dreaptă, luate ca centre, se duc două cercuri cu raze egale şi mai mari decît jumătatea segmentului AB (Fig. 4.1). Perpendiculara căutată trece prin punctele de intersecţie ale celor două cercuri.

2° Perpendiculara dusă printr-un punct M pe o dreaptă.

Punctul M este exterior dreptei.

2_1. Un cerc cu centrul în M şi rază convenabilă, intersectează dreapta în două puncte simetrice faţă de piciorul perpendicularei căutate (Fig. 4.2). Ajungem astfel la cazul precedent.

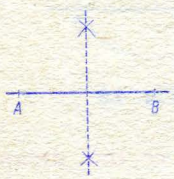


Fig. 4.1

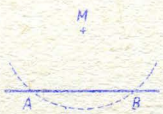


Fig. 4.2

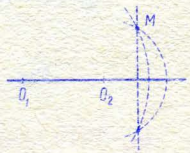


Fig. 4.3

2_2. Prin punctul M ducem două cercuri cu centrele pe dreaptă (Fig. 4.3). Perpendiculara dusă din M pe dreaptă trece prin celălalt punct de întîlnire a celor două cercuri.

2_3. Plasăm o catetă a echerului pe dreapta dată şi fixăm rigla pe ipotenuza echerului. Deplasăm echerul pînă cînd cealaltă catetă trece prin punctul M. Perpendiculara căutată este de-a lungul acestei catete.

Punctul M se găseşte pe dreaptă.

2_1 Orice cerc cu centrul în M, intersectează dreapta în două puncte A şi B aşa încît M este mijlocul segmentului AB. Se ajunge la construcţia din fig. 4.1.

2_2. Prin punctul M ducem un cerc cu centrul într-un punct oarecare O (Fig. 4.4.). Notăm cu M_1 celălalt punct de intersecţie al cercului cu dreapta. Perpendiculara căutată este MM_2, unde M_1OM_2 este un diametru al cercului.

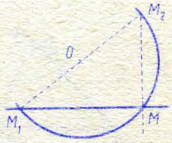


Fig. 4.4

3° Paralela dusă printr-un punct M la o dreaptă dată.

3_1. Plasînd o catetă a unui echer pe dreapta dată și fixînd rigla pe ipotenuza echerului, deplasăm echerul pînă cînd cateta, care a fost inițial pe dreapta dată, trece prin punctul M. Paralela căutată este de-a lungul acestei catete.

3_2. Cu M ca centru ducem un arc de cerc care taie dreapta în punctul B. Cu centrul în punctul B și cu aceeași rază ducem un arc ce trece prin M și taie dreapta în punctul A. Cu centrul în B ducem un arc de cerc cu raza AM, care taie primul arc în C. Paralela căutată trece prin M și C (Fig. 4.5).

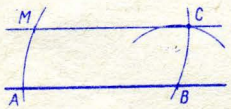


Fig. 4.5

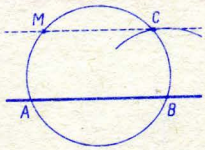


Fig. 4.6

3_3. Prin punctul M ducem un cerc oarecare, ce taie dreapta în punctele A și B (Fig. 4.6). Intersecția C a acestui cerc cu un cerc cu centrul în punctul B și rază AM, se află pe paralela căutată (este vorba de acela dintre punctele de intersecție care se găsește de aceeași parte a dreptei, ca și punctul M).

4° Printr-un punct O' al unei drepte $O'X'$, să se ducă o dreaptă ce face cu $O'X'$ un unghi egal cu un unghi dat XOY.

Cu centrul în O și O', ducem două cercuri cu aceeași rază. Semidreptele OX, OY și $O'X'$ sînt intersectate de aceste cercuri respectiv în punctele A, B și A' (Fig. 4.7). Intersectînd cercul cu centrul în O' cu un cerc cu centrul în A' și rază egală cu AB, obținem două puncte B', B''. Oricare din unghiurile $X'O'B'$ și $X'O'B''$ sînt egale cu unghiul dat (Dacă unghiurile sînt orientate, numai unul corespunde).

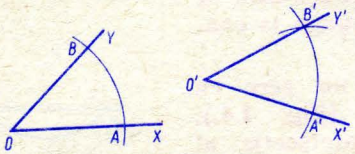


Fig. 4.7

5° Pe un segment dat să se construiască un triunghi asemenea cu un triunghi dat.

În capetele segmentului și de aceeași parte a lui se construiesc două din unghiurile triunghiului dat.

Observații. a. Aceeași construcție permite găsirea celui

de al treilea unghi cînd se cunosc celelalte două. E suficient să pornim de la un segment oarecare.

b. Repetînd procedeul, pe un segment dat putem construi un poligon asemenea cu un poligon dat.

6° Împărţirea unui unghi în două părţi egale.

Fie unghiul XOY. Un cerc cu centrul în O şi rază oarecare intersectează laturile unghiului în punctele A şi B. Cercurile cu centrele în A şi B şi cu aceeaşi rază, se intersectează pe bisectoarea unghiului XOY (Fig. 4.8).

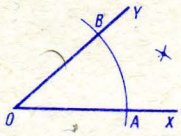


Fig. 4.8

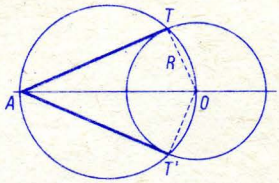


Fig. 4.9

7° Dintr-un punct dat A să se ducă o tangentă la un cerc dat de centru O şi rază R.

Punctele de tangenţă T şi T' se găsesc la intersecţia cercului dat cu cercul cu diametrul AO (Fig. 4.9).

8° Tangenta la un cerc paralelă cu o dreaptă dată.

Punctele de tangenţă sînt extremităţile diametrului perpendicular pe dreapta dată.

9° Să se construiască tangentele comune la două cercuri de centre O_1, O_2 şi raze R_1, R_2 ($R_1 \geqslant R_2$).

Dacă cercurile sînt exterioare unul altuia, intersectăm cercul cu diametrul O_1O_2, cu două cercuri cu centrul în O_1 şi raze $R_1 - R_2$ şi $R_1 + R_2$ (Fig. 4.10). Obţinem astfel punctele A', A'' şi C', C''. Tangenta comună exterioară AB fiind paralelă cu dreapta O_2A', punctele de tangenţă se obţin ducînd din O_1 şi O_2 razele paralele cu O_1A'. Tangenta comună interioară este paralelă cu dreapta O_2C', deci punctele de tangenţă se obţin ducînd din O_1 şi O_2 razele paralele cu O_1C'. Celelalte două tangente comune se obţin analog.

Dacă cercurile sînt secante, ele nu au decît tangente comune exterioare, ce se construiesc ca mai sus.

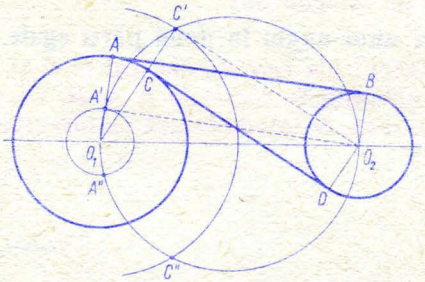


Fig. 4.10

10°. Construirea unui arc de cerc capabil de un unghi dat.

Construcția este dată în § 2.3.1.

11° Să se construiască un triunghi ABC cunoscînd o latură a și unghiurile alăturate B și C $(B+C<180°)$.

Prin capetele unui segment de lungime a se duc două semidrepte ce fac cu segmentul dat unghiurile B și C. La intersecția lor se găsește vîrful A al triunghiului.

12°. Să se construiască un triunghi ABC cunoscînd unghiul A și laturile b,c.

Pe laturile unui unghi egal cu A se iau două segmente egale cu b și c. Se obțin astfel vîrfurile B și C ale triunghiului.

13° Să se construiască un triunghi ABC, cunoscînd unghiul B și laturile b și c.

Presupunem $c>b$. Cum unghiului B i se opune latura b, el trebuie să fie mai mic decît unghiul C, deci el este obligatoriu ascuțit, căci un triunghi nu poate avea două unghiuri obtuze. Segmentul AB de lungime c este cunoscut. Ducem semidreapta BX, așa ca $\sphericalangle ABX=\sphericalangle B$. Față de dreapta BX, cercul cu centrul în A și raza b poate să nu o intersecteze, să fie tangent în C, sau să o intersecteze în punctele C' și C'', după cum b este mai mic, egal sau mai mare decît $c\sin B$. În primul caz, problema nu are soluții, în al doilea avem o singură soluție (triunghiul este dreptunghic în C) și în al treilea caz avem două soluții (Fig. 4.11).

În cazul cînd triunghiul ABC este dreptunghic în C, vîrful C se găseşte pe un cerc cu diametrul AB. Se construieşte în felul acesta un triunghi dreptunghic, cînd se dă ipotenuza şi o catetă.

Dacă $c=b$, triunghiul ABC este isoscel şi avem o singură soluţie.

Dacă $c<b$, avem o singură soluţie.

14° Să se construiască un triunghi cunoscînd cele trei laturi a,b,c $(a-b<c<a+b)$.

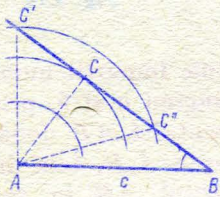


Fig. 4.11

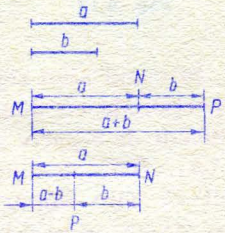


Fig. 4.12

Segmentul AB cu lungimea c este cunoscut. Vîrful C se află la intersecţia cercurilor cu centrele în punctele A, B şi razele respectiv egale cu b şi c.

15° Să se construiască un segment de lungime egală cu suma sau diferenţa lungimilor a două segmente.

Pe o dreaptă se iau în acelaşi sens, sau în sensuri contrarii, segmentele MN şi NP de lungime a şi b (Fig. 4.12). Segmentul MP are în primul caz lungimea $a+b$, iar în al doilea caz lungimea $a-b$ şi se numeşte *segmentul sumă* sau *segmentul diferenţă*, al celor două segmente.

16° Împărţirea unui segment AB în părţi proporţionale cu segmente date. Construirea unei diviziuni armonice.

16_1 Din unul din capetele segmentului AB de exemplu din A, ducem o semidreaptă oarecare pe care luăm în ordine segmente egale cu segmentele date, de exemplu AA_1, A_1A_2, A_2A_3, (Fig. 4.13). Punctele de subdiviziune ale segmentului AB se obţin ducînd prin A_1 şi A_2 paralele cu A_3B.

16_2. Pe o paralelă la segmentul AB se iau în ordine segmentele date, de exemplu A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 (Fig. 4.14). Notînd cu O intersecţia dreptelor AA_1 şi BA_4, punctele de diviziune ale segmentului AB se obţin intersectîndu-l cu dreptele OA_2 şi OA_3.

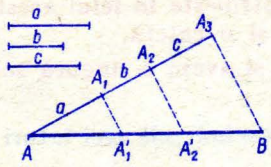


Fig. 4.13

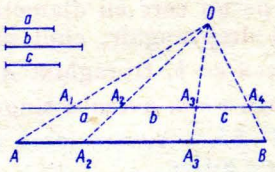


Fig. 4.14

16_3. În cazul cînd segmentul AB trebuie împărţit numai în două părţi proporţionale cu două segmente de lungimi a şi b, prin punctele A şi B ducem de o parte şi de alta a segmentului AB două segmente paralele AA_1, BB_1 de lungimi a şi b. Dreapta A_1B_1 taie dreapta AB în punctul C, care împarte interior segmentul AB în raportul a/b (Fig. 4.15). Dacă segmentele paralele AA_1, BB_1' de lungimi a şi b sînt de aceeaşi parte cu AB, dreapta A_1B_1' intersectează pe AB în punctul D, care împarte exterior segmentul AB în acelaşi raport a/b. Rezultă că punctele A,C,B,D formează o diviziune armonică.

17° Să se construiască media geometrică (sau media proporţională) a două segmente de lungimi a şi b.

17_1. Pe o dreaptă se iau în acelaşi sens segmentele AB şi BC de lungimi a şi b şi se duce un semicerc cu diametrul AC (Fig. 4.16). Perpendiculara în B pe AC, taie semicercul în D. Segmentul BD are lungimea $\sqrt{ab}$.

17_2. Presupunînd $a>b$, ducem un semicerc cu diametrul AB de lungime a. Pe acest diametru luăm un punct M, aşa ca $AM=b$ (Fig. 4.17). Perpendiculara în M pe AB taie semicercul în punctul N. Segmentul AN are lungimea $\sqrt{ab}$.

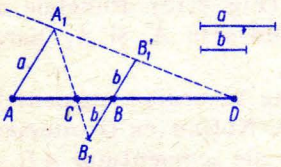


Fig. 4.15

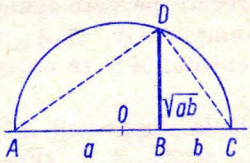


Fig. 4.16

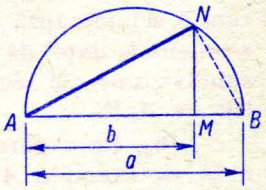


Fig. 4.17

17_3. Pe o dreaptă luăm ca mai sus segmentele AB și AM de lungimi a și b. Lungimea tangentei dusă din punctul A la orice cerc ce trece prin cele două puncte M,B este egală cu $\sqrt{ab}$ (Fig. 4.18).

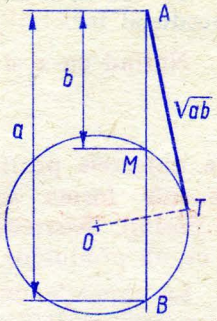


Fig. 4.18

Aplicație. Dacă aria unui poligon are ca măsură produsul lungimilor a două segmente, latura pătratului echivalent acestui poligon este medie proporțională între aceste lungimi. Segmentele care se consideră cel mai des sînt baza și semiînălțimea pentru un *triunghi*, baza și înălțimea pentru un *paralelogram*, înălțimea și linia mijlocie pentru un *trapez*, apotema și semiperimetrul pentru un *poligon regulat*, raza și semicircumferința pentru un *cerc*. În fig. 4.19 este tratat cazul unui triunghi.

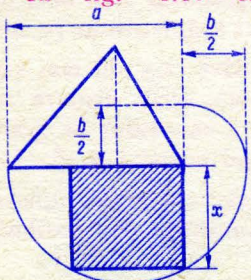


Fig. 4.19

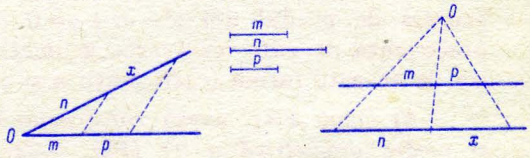


Fig. 4.20

18° Să se construiască a patra proporțională cu trei segmente date. Dacă lungimile segmentelor date sînt m,n și p trebuie să avem

$$\frac{m}{n}=\frac{p}{x},$$

unde x este lungimea segmentului căutat. Se utilizează construcții analoage cu cele de la 16_1 și 16_2 după cum se vede în fig. 4.20. Se constată că avem mai multe posibilități pentru același tip de construcție. Astfel în primul caz luăm pe una din laturile unghiului fie segmentele de lungimi m și p, fie m și n. De asemenea putem lua toate segmentele cu aceeași origine O, caz în care spațiul necesar construcției este mai mic.

Observație. Dacă în construcțiile precedente se ia $m=1$, sau $n=1$ se obțin *segmente care au ca lungime produsul sau cîtul lungimilor a două segmente date.*

19° Să se construiască două segmente de dreaptă, cunoscînd suma și produsul lor.

Notînd cu x și y lungimile celor două segmente, trebuie să avem

$$x+y=a;\quad xy=bc,$$

unde numerele pozitive a,b,c sînt cunoscute (Produsul lungimilor este scris sub forma bc, pentru necesitățile construcției. Acest lucru este posibil, deoarece orice număr poate fi scris într-o infinitate de feluri ca un produs de două numere).

La capetele unui segment BC, de lungime a, se iau segmentele perpendiculare BB' și CC' de lungimi b și c și situate de aceeași parte a lui BC. Cercul cu diametrul $B'C'$ (Fig. 4.21) intersectează segmentul BC în două puncte M și M' simetrice față de capetele segmentului. Segmentele căutate sînt BM și MC (sau BM' și $M'C$, căci $M'C=BM$). Problema este posibilă dacă cercul taie segmentul BC, deci dacă $4bc\leqslant a^2$. În caz de egalitate cercul este tangent segmentului în mijlocul lui.

Observații. α) Cele două numere pozitive x,y de mai sus, satisfac ecuația de gradul doi $z^2-az+q=0$ ($q=bc$). Prin urmare construcția precedentă permite rezolvarea geometrică a ecuațiilor de gradul al doilea de această formă (coeficienții a și q fiind pozitivi și $a^2-4bc\geqslant 0$).

β) Dacă $b=c$, avem *construcția a două segmente, cunoscînd suma și media geometrică a lor* (Fig. 4.22). Condiția de posibilitate este ca $2b\leqslant a$.

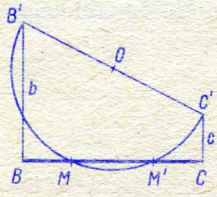


Fig. 4.21

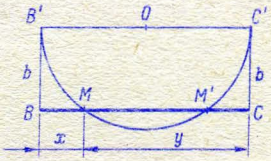


Fig. 4.22

20° Să se construiască două segmente de dreaptă cunoscînd diferența și produsul lor.

Notînd cu x și y lungimile celor două segmente, trebuie să avem

$$x-y=a;\quad xy=bc,$$

unde a,b,c sînt numere pozitive. La capetele segmentului BC, de lungime a, de o parte și de alta a lui ducem segmentele perpendiculare BB' și CC' de lungime b și c (Fig. 4.23). Cercul cu diametrul $B'C'$ taie prelungirile segmentului BC în două puncte M și M' așa ca $MB=CM'$. Segmentele MB și MC dau soluția problemei, care este totdeauna posibilă.

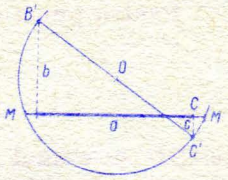


Fig. 4.23

Observații: α). Numerele x și $-y$ satisfac ecuația de gradul al doilea $z^2-az-q=0$, $a>0$; $bc=q>0$, deci construcția precedentă permite găsirea pe cale geometrică a rădăcinii pozitive și a valorii absolute a rădăcinii ei negative.

β) Dacă luăm $b=c$, avem *construcția a două segmente cunoscînd diferența și media lor geometrică*. În acest caz în fig. 4.23, centrul O al cercului este la mijlocul segmentului BC.

21° Să se împartă un segment de dreaptă în medie și extremă rație.

Fiind dat un segment de dreaptă BC, se zice că un punct D îl împarte în medie și extremă rație, dacă avem

$$\frac{BC}{BD}=\frac{BD}{CD}.$$

Există două puncte D, care satisfac această relație, unul interior segmentului BC, notat D și altul D' exterior acestui segment și la stînga lui, dacă C este la dreapta lui B (Fig. 4.24).

Pentru punctul D proporția precedentă se poate scrie

$$\frac{BC}{BD}=\frac{BC+BD}{BC},$$

Fig. 4.24

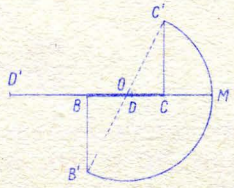


Fig. 4.25

deci BD este unul dintre cele două segmente a căror diferență este BC și care au media geometrică tot BC (al doilea segment este $BC+BD$).

Pentru punctul D' avem

$$\frac{BC}{BD'}=\frac{BD'}{D'C}=\frac{BD'-BC}{BC},$$

deci BD' este unul din cele două segmente ale căror diferență este BC și medie geometrică este tot BC (al doilea este $BD'-BC$).

Cum problema determinării a două segmente așa ca diferența și media lor geometrică (deci produsul lor) să fie date, are o singură soluție, trebuie să avem

$$BC+BD=BD' \text{ deci și } BD'-BC=BD.$$

Construcția segmentului BD este cea de mai sus (20°) cu particularizarea ca cele trei segmente BC, BB' și CC' să fie egale (Fig. 4.25). Notînd cu M punctul de intersecție al cercului cu diametrul $B'C'$ cu prelungirea segmentului BC dincolo de C, segmentele căutate sînt MC și MB. Punctul D interior lui BC, este astfel încît $BD=CM$, iar punctul D' exterior lui BC și la stînga acestuia este astfel ca $D'B'=BM$. Se verifică relația $BC+BD=BD'$.

Notînd $BC=a$, avem

$$BD=\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1),\ DC=\frac{a}{2}(3-\sqrt{5}),$$

$$BD'=\frac{a}{2}(\sqrt{5}+1),\ D'C=\frac{a}{2}(3+\sqrt{5}).$$

ceea ce arată că poziția punctelor D și D' nu depinde decît de lungimea segmentului BC.

Împărțirea unui segment printr-un punct D, așa ca

$$\frac{BC}{BD}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1{,}618\ldots$$

poartă denumirea de *secțiune de aur* (*Leonardo da Vinci*), iar dreptunghiul de laturi BC și BD, *dreptunghi de aur*. Explicația acestor denumiri constă în aceea că el a fost utilizat, conștient sau nu, în crearea unor monumente socotite dintre cele mai frumoase.

Denumirea operației de împărțire a unui segment în medie și extremă rație provine din formula:

$$\frac{BC+BD}{BC}=\frac{BC}{BD}$$

din care se vede că BC este media proporțională (pe scurt medie) a extremilor $BC+BD$ și BD, dintre care unul este BD.

Observație. O altă construcție a punctelor D și D' se face luînd un segment CE egal cu BC și perpendicular pe acesta (Fig. 4.25*a*). Intersecția dreptei ce unește punctul B cu centrul O al cercului cu diametrul CE, sînt punctele M și N. Distanțele punctelor D și D' la B sînt egale cu AM și AN.

22° Construcții de cercuri

22_1. Să se construiască un cerc care trece prin trei puncte necoliniare.

Centrul cercului se află la intersecția mediatoarelor triunghiului format de cele trei puncte.

22_2. Să se construiască un cerc care trece prin două puncte date și care este tangent la o dreaptă dată.

Fie A,B cele două puncte și dreapta D.

Dacă unul dintre puncte, de exemplu A, este pe dreaptă, centrul cercului se găsește la intersecția perpendicularei în A pe dreapta D, cu mediatoarea segmentului AB (Fig. 4.26).

Dacă dreapta AB este paralelă cu dreapta D, punctul de tangență T este la intersecția mediatoarei segmentului AB cu D și sîntem în cazul precedent (Fig. 4.27).

Dacă dreapta ce trece prin punctele A și B întîlnește dreapta D în punctul I, punctul de tangență T al cercului cu dreapta este astfel încît $IT^2=IA\cdot IB$. Pentru a găsi lungimea acestui segment, este suficient să ducem prin AB un cerc oarecare și să găsim lungimea tan-

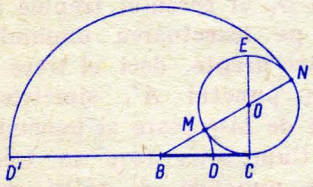


Fig. 4.25 *a*

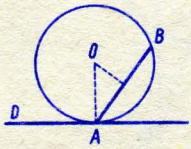


Fig. 4.26

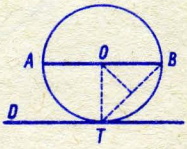


Fig. 4.27

gentei dusă din I la acest cerc, a cărui pătrat este tot $IA \cdot IB$. (Fig. 4.28). Avem două soluții. Odată găsit punctul de tangență sîntem în cazul precedent.

22_3. Printr-un punct dat să se ducă un cerc tangent la două drepte.

Dacă dreptele sînt paralele, centrul cercului se va găsi pe o paralelă la cele două drepte și egal depărtată de ele. Raza r a cercului va fi jumătate din distanța dintre cele două drepte, deci centrul cercului se va găsi la intersecția dintre un cerc cu centrul în punctul dat și raza r și linia mediană dintre cele două drepte date. Avem în general două soluții și numai una dacă punctul se găsește pe una din drepte (Fig. 4.29).

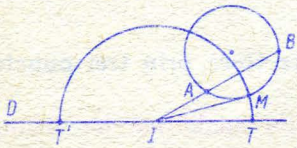


Fig. 4.28

Fig. 4.29

Dacă dreptele se taie într-un punct O și punctul A se găsește pe una din drepte, centrul cercului se găsește la intersecția dintre perpendiculara în A la acea dreaptă pe care se află și cele două bisectoare ale unghiului. Avem deci două soluții (Fig. 4.30). Celelalte două puncte de tangență B și B' sînt așa ca $OB = OB' = OA$.

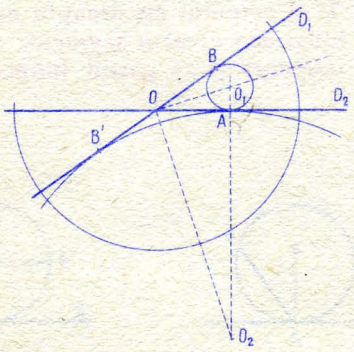


Fig. 4.30

Dacă punctul A nu se găsește pe una din drepte, cercul se va găsi în acel unghi făcut de cele două drepte în care se află punctul A. Centrul O_1 al cercului trebuie să fie pe bisectoarea unghiului dintre drepte, deci el trece și prin punctul A', simetricul față de bisectoare al punctului A. Cum orice cerc ce trece prin punctele A, A' și este tangent la una din drepte este

tangent și la cealaltă, problema s-a redus la construirea unui cerc ce trece prin două puncte și este tangent la o dreaptă fixă.

Putem proceda și altfel. Centrul trebuie să fie egal depărtat de o dreaptă fixă (dreapta cea mai apropiată din cele două drepte), de exemplu D_2 și un punct fix (punctul A), deci se găsește pe o parabolă cu directoarea, dreapta D_2(§ 6.3). Intersecția dintre bisectoare și parabolă dă două poziții pentru centrul cercului (Fig. 4.31).

22_4. Să se ducă un cerc care trece prin două puncte date și este tangent la un cerc dat.

Fie cercul dat cu centrul O și fie două puncte A și B exterioare lui. Prin acestea ducem un cerc oarecare cu centrul O' care să intersecteze cercul O în două puncte, C și D (Fig. 4.32). Fie I punctul de inter-

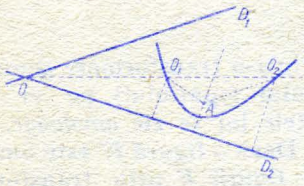


Fig. 4.31

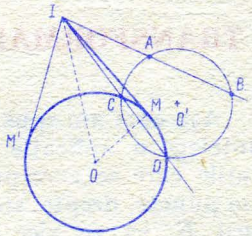


Fig. 4.32

secție al dreptelor AB și CD. Avem $IA \cdot IB = IC \cdot ID = IM^2$, unde IM este tangentă la cercul O. Cercul care trece prin A, B și M este cercul căutat. Cum din punctul I se poate duce și a doua tangentă IM', avem ca a doua soluție cercul ce trece prin punctele A, B și M'. Dreptele AB și CD sînt paralele, dacă punctele A și B sînt simetrice față de un diametru al cercului O. În acest caz al treilea punct prin care trece cercul căutat, este oricare din capetele diametrului respectiv.

23° Rezolvarea geometrică a ecuației de gradul al doilea. Orice ecuație de gradul al doilea se poate scrie sub una din formele

$$x^2 - ax + b^2 = 0$$
$$x^2 - ax - b^2 = 0$$
$$x^2 + ax + b^2 = 0$$
$$x^2 + ax - b^2 = 0,$$

unde $a \geqslant 0, b \neq 0$ și rădăcinile sînt reale ($a^2 - 4b^2 \geqslant 0$), (Algebra IV.2.2).

În primul caz cele două rădăcini sînt pozitive și au suma a și produsul b^2. Construcția 19° permite obținerea a două segmente de lungimi egale cu aceste rădăcini.

În al doilea caz suma rădăcinilor este a și produsul $-b^2$, deci avem rădăcini de semne contrare, cea mai mare în valoare absolută fiind cea pozitivă. Construcția 20° permite obținerea a două segmente de lungimi egale cu rădăcina pozitivă și cu valoarea absolută a celei negative.

Ultimele două cazuri se reduc la primele, schimbînd semnul rădăcinilor, deci făcînd în ecuații, transformata în $-x$ (Algebră IV.3). Apoi, în cazul al treilea, prin construcția 19° obținem valorile absolute ale celor două rădăcini negative, iar în cazul al patrulea, prin construcția 20° obținem valoarea absolută a rădăcinii negative și rădăcina pozitivă (care este cea mai mică în valoare absolută dintre cele două).

5. TRANSFORMĂRI GEOMETRICE ÎN PLAN ȘI SPAȚIU

Așa cum am spus în Introducere, printr-o transformare geometrică se înțelege o aplicație bijectivă a planului (spațiului) pe el însuși. Figurile care se corespund, ca și elementele lor se zic *omoloage*. Astfel avem puncte, drepte, sfere etc., omoloage. Dacă o figură F' este omoloaga figurii F, ea se zice că este *imaginea* figurii F prin transformarea dată.

Prin compunerea a două transformări se înțelege o nouă transformare obținută efectuînd succesiv cele două transformări. Dacă printr-o transformare o figură F se transformă în figura F', se numește *transformare inversă*, transformarea care transformă figura F' în figura F.

5.1. TRANSLAȚIA

Prin translație se înțelege o deplasare (izometrie directă) fără punct fix, sau transformarea identică. Dacă M și M' sînt două puncte omoloage, translația este complet determinată de vectorul liber $\mathbf{v}=\mathbf{MM'}$ (§ 9.1), căci oricare ar fi perechea de puncte omoloage N și N', avem $\mathbf{v}=\mathbf{NN'}$. (Fig. 5.1).

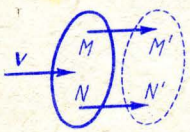


Fig. 5.1

Prin compunerea a două translații de vectori $\mathbf{v}$ și $\mathbf{w}$ obținem tot o translație de vector $\mathbf{v}+\mathbf{w}$. Translația de vector nul, este translația nulă

sau transformarea identică. Ea lasă neschimbate figurile. Translația inversă a unei translații de vector $\mathbf{v}$, este de vector $-\mathbf{v}$. Rezultă că mulțimea tuturor translațiilor formează un grup abelian. Rezultă că orice translație păstrează lungimile și unghiurile figurilor, deci două figuri omoloage sînt egale.

5.2. ROTAȚIA

a. Într-un plan, rotația este o deplasare cu un punct fix O. Punctul fix O se numește *centru de rotație*, iar unghiul orientat $\sphericalangle MOM' = \alpha$, unde M și M' sînt două puncte omoloage, se numește *unghi de rotație*. Rotațiile păstrează lungimile și unghiurile figurilor. Compunerea a două rotații de același centru și de unghiuri α_1, α_2 este o rotație de același centru și de unghi $\alpha_1 + \alpha_2$. Transformarea inversă a unei rotații de unghi α este o rotație de același centru și unghi $-\alpha$. Rotațiile de același centru formează un grup abelian.

b. În spațiu, rotația este o deplasare ale cărei puncte fixe se află pe o dreaptă Δ, numită *axă de rotație*. Dacă punctele M și M' sînt omoloage unghiul $\sphericalangle MOM' = \alpha$ orientat într-un plan perpendicular pe axă în punctul O (orientare păstrată în toate planele paralele cu el), este același oricare ar fi perechea de puncte omoloage. (Fig. 5.2). Unghiul α se numește *unghi de rotație*. Compunerea rotațiilor se face ca mai sus.

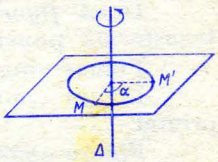


Fig. 5.2

5.3. SIMETRIA

a. Simetria față de un punct O, numit centru de simetrie este acea transformare în care punctul O este mijlocul segmentului determinat de două puncte omoloage M și M'.

O simetrie față de un punct este echivalentă cu o rotație de 180° în jurul centrului de simetrie. Rezultă că simetriile nu modifică lungimile și unghiurile figurilor, deci două figuri omoloage sînt egale.

b. Simetria față de o dreaptă Δ este acea transformare pentru care punctele omoloage M și M' sînt astfel încît segmentul MM' este perpendicular în mijlocul său pe dreapta Δ. Două figuri simetrice față de o dreaptă sînt egale.

c. Simetria față de un plan P, este acea transformare pentru care punctele omoloage M și M' sînt astfel încît segmentul MM' este perpendicular în mijlocul său pe planul P.

Două figuri simetrice față de două plane, sînt simetrice față de dreapta de intersecție a celor două plane.

Două figuri simetrice față de două drepte concurente într-un punct O sînt simetrice față de punctul O.

5.4. OMOTETIA ȘI ASEMĂNAREA

Față de un punct fix O, numit *centru de omotetie* și un număr real k pozitiv sau negativ, numit *raport de omotetie*, două puncte M și M' de pe aceeași dreaptă ce trece prin O sînt transformate prin omotetie, dacă avem $\frac{[OM]}{[OM']}=k$ (Fig. 5.3).

inversă dacă $k<0$. În primul caz punctele omoloage M și M' sînt de aceeași parte a centrului de omotetie, iar în al doilea caz de o parte și de alta a centrului.

Dacă $k=1$, orice punct este propriul lui omolog prin omotetie. Dacă $k\neq 1$, centrul de omotetie este singurul punct care este propriul său omolog.

Două *figuri* se numesc *omotetice*, dacă există o omotetie care transformă punctele unei figuri în punctele celeilalte.

Figura omotetică a unei drepte este o dreaptă paralelă cu prima.

Figura omotetică a unui triunghi este un triunghi asemenea cu primul.

Figura omotetică a unui cerc este tot un cerc, centrele fiind puncte omoloage.

O dreaptă și un plan care sînt perpendiculare, au ca omotetice o dreaptă și un plan perpendicular pe ea.

În două figuri omotetice, diedrele omoloage sînt egale, iar unghiurile poliedre sînt egale sau simetrice după cum omotetia este directă sau inversă.

Figura omotetică a unei sfere este o sferă, raportul razelor fiind egal cu raportul de omotetie, iar cele două centre se corespund. Reciproc, două sfere pot fi considerate ca figuri omotetice în două feluri după cum omotetia este directă sau nu.

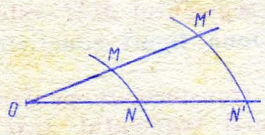


Fig. 5.3

Printr-o omotetie lungimile segmentelor se înmulțesc cu k, iar unghiurile se păstrează în cazul omotetiei directe și își schimbă sensul în cazul omotetiei inverse.

Două cercuri oarecare pot fi considerate totdeauna ca omotetice în două feluri, directe sau inverse. Cele două centre de omotetie O și O' împart segmentul deter-

minat de centrele cercurilor într-un raport egal cu cel al razelor. Tangentele comune exterioare (dacă există) se vor întîlni în centrul de omotetie directă, iar tangentele comune interioare (dacă există) se vor întîlni în centrul de omotetie inversă.

Sînt de reținut teoremele.

— Două figuri sînt omotetice dacă în planul lor există două puncte A și A', astfel încît dacă M și M' sînt două puncte oarecare omoloage din cele două figuri, segmentele AM și $A'M'$ sînt paralele și totdeauna în același raport k.

— Două figuri omotetice cu a treia sînt omotetice între ele, cele trei centre de omotetie sînt coliniare.

— Fiind dat un triunghi, cercul circumscris și cercul celor nouă puncte au ca centru de omotetie directă ortocentrul H, iar ca centru de omotetie inversă centrul de greutate G.

Două figuri din plan sînt *asemenea*, dacă ele se pot așeza astfel încît să fie omotetice.

Două figuri din spațiu sînt *asemenea*, dacă una dintre ele este egală cu una dintre omoteticele directe ale celeilalte.

Raportul de omotetie se numește, în ambele cazuri *raport de asemănare*.

5.5. TRANSFORMAREA PRIN POLARE RECIPROCE

Fiind dat un cerc fix O, numit *cerc director*, și o figură F formată din puncte și drepte, transformata F' a acestei figuri se obține în felul următor: **fiecărei drepte δ din F îi corespunde un punct P din F', polul ei față de cercul director, iar fiecărui punct p din F îi corespunde o dreaptă Δ din F' polara punctului față de cercul director.**

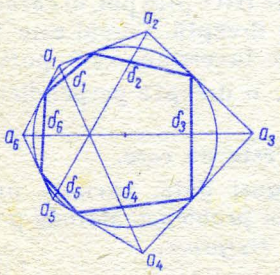


Fig. 5.4

Conform teoremei de la § 2.5, dacă o dreaptă a figurii F se rotește în jurul unui punct fix, punctul corespunzător al figurii F' descrie o dreaptă și reciproc. De asemenea, dacă trei drepte ale figurii F sînt concurente, punctele corespunzătoare din F' sînt coliniare, și reciproc.

Exemplu. Teorema lui Brianchon. Să presupunem că figura F este un hexagon înscris într-un cerc și fie δ_1, δ_2,..., δ_6 laturile lui (Fig. 5.4). Ca cerc director luăm cercul în care este înscris hexagonul. Polii $a_1, a_2, \ldots, a_6$ ecrespunzători laturilor, se obțin intersectînd tangentele

la cerc în vîrfurile hexagonului. Figura F', polar reciprocă, este hexagonul circumscris cercului cu vîrfurile $a_1, a_2, \ldots, a_6$. Conform teoremei lui Pascal (§ 3.1.4) punctele de intersecție ale laturilor δ_1 și δ_4; δ_2 și δ_5; δ_3 și δ_6 sînt coliniare. Rezultă atunci că diagonalele a_1a_4, a_2a_5, a_3a_6 sînt concurente, ceea ce constituie teorema lui Brianchon.

5.6. INVERSIUNEA

Fiind dat un punct fix O din plan, numit *pol de inversiune*, și un număr fix k, numit *putere de inversiune*, prin inversul unui punct M înțelegem punctul M', aflat pe dreapta OM și așa ca $[OM]\cdot[OM']=k$.

Dacă numărul k este pozitiv, punctele M și M' sînt de aceeași parte a polului O, iar în caz contrar de o parte și de alta a polului.

Observăm că orice punct are un invers, afară de pol, al cărui invers se consideră aruncat la infinit. De asemenea, dacă M' este inversul lui M, atunci și reciproc, M este inversul lui M', evident cu același pol și aceeași putere.

Cînd punctul M descrie o figură F, punctul M' descrie figura F'. Cele două figuri se zic *inverse* una alteia, sau *transformate prin raze vectoare reciproce* (Segmentele OM, OM' se numesc raze vectoare).

Două figuri inverse ale unei a treia figuri, în raport cu același pol, sînt omotetice între ele.

Dacă puterea de inversiune k este pozitivă, un rol important îl are *cercul de inversiune*, care are centrul în polul O și raza $\sqrt{k}$ (Fig. 5.5). Două puncte inverse cu puterea k, sînt conjugate față de cerc (§2.5), deci dacă M este interior cercului, coarda AB, perpendiculară pe OM este polara punctului M' față de cerc.

Avem proprietățile:

Inversa unei drepte ce trece prin pol este dreapta însăși.

Inversa unei drepte oarecare este un cerc ce trece prin pol, al cărui diametru ce trece prin pol este perpendicular pe dreaptă. Cercul este între pol și dreaptă dacă și numai dacă puterea de inversiune este pozitivă.

Inversa unui cerc ce trece prin pol este o dreaptă perpendiculară diametrului cercului ce trece prin pol.

Inversa unui cerc ce nu trece prin pol este un cerc.

Considerarea figurii inverse a unei figuri date, permite uneori demonstrarea unor teoreme sau rezolvarea unor probleme. Metoda poartă denumirea de *transformare prin raze vectoare reciproce*.

Exemplu. Teorema lui *Ptolemeu* (§ 3.2.1). Să presupunem că patrulaterul convex $OABC$ este înscris într-un cerc (Fig. 5.6). Să inversăm

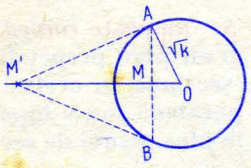


Fig. 5.5

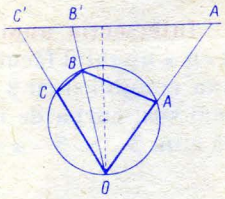


Fig. 5.6

această figură, polul de inversiune fiind O, iar puterea un număr k. Inversa cercului este o dreaptă pe care se găsesc A',B',C' inversele vîrfurilor A,B,C. Presupunînd că B' se află între A' și C' avem evident

$$A'C'=A'B'+B'C'.$$

Din

$$OA\cdot OA'=k,\ OB\cdot OB'=k,\ OC\cdot OC'=k,$$

deducem

$$\frac{A'C'}{AC}=\frac{OC'}{OA},$$

deci triunghiurile OAC și $OC'A'$ sînt asemenea. Rezultă atunci

$$A'C'=\frac{OC'\cdot AC}{OA}=\frac{k}{OC\cdot OA}\,AC$$

și expresii analoage pentru $A'B'$ și $B'C'$. Se obține atunci

$$OB\cdot AC=OC\cdot AB+OA\cdot BC,$$

care este teorema lui Ptolemeu. Reciproc, din această relație avem

$$\frac{k}{OB'}\,\frac{\lambda}{OA'\cdot OC'}\,A'C'=\frac{\lambda}{OC'}\,\frac{\lambda}{OA'\cdot OB'}\,A'B'+\frac{\lambda}{OA'}\,\frac{\lambda}{OB'\cdot OC'}\,B'C',$$

de unde

$$A'C'=A'B'+B'C',$$

deci punctele A',B',C' sînt în linie dreaptă și prin urmare inversele lor A,B,C, sînt pe cercul care trece prin polul O.

6. CONICE

Intersecția unui con circular cu un plan se numește *conică*. Notînd cu α unghiul făcut de generatoarele conului cu un plan perpendicular pe axa conului și cu β unghiul făcut de planul de secțiune cu același plan ca mai sus, curba de intersecție este o elipsă, o parabolă sau o hiperbolă după cum $\beta < \alpha$, $\beta = \alpha$ sau $\beta > \alpha$ (Fig. 6.1). Dacă în plus planul de secțiune

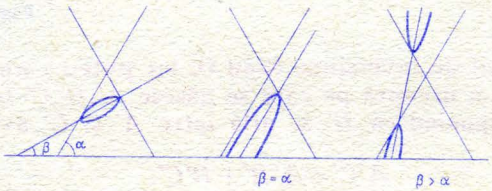


Fig. 6.1

trece prin vîrful conului (care este presupus totdeauna că are două pînze de o parte și de alta a vîrfului) conica „degenerează" într-un punct, două drepte confundate sau două drepte concurente.

Așa cum se va vedea mai jos, conicele se pot defini ca locuri geometrice.

6.1. ELIPSA

Se numește elipsă, locul geometric al punctelor M din plan a căror sumă a distanțelor la două puncte fixe F, F', numite *focare*, este egală cu numărul pozitiv $2a$. Elipsa are două axe de simetrie, una ce trece prin cele două focare, iar cealaltă mediatoarea segmentului FF' (Fig. 6.2). Punctul lor de concurență O este *centrul elipsei*. Intersecțiile A, A' și B, B' cu cele două axe de simetrie se numesc vîrfurile elipsei și determină două segmente de lungime $2a$ și $2b$, numite pe scurt axele elipsei. Dacă *distanța focală* $F'F$ este egală cu $2c$, avem $a^2 = b^2 + c^2$. Dacă $a > b$ există pentru fiecare focar cîte o dreaptă perpendiculară pe $A'A$, numită *directoare*, așa ca raportul distanțelor unui punct oarecare

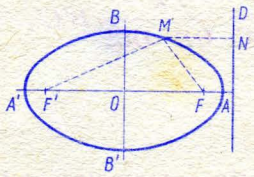


Fig. 6.2

de pe elipsă la focar și directoare să fie o cantitate e constantă numită *excentricitate*. Astfel pentru focarul F avem

$$\frac{MF}{MN}=\frac{c}{a}=e<1.$$

Directoarele corespunzătoare focarelor F' și F sînt simetrice față de centrul elipsei.

În cazul particular, *cînd semiaxele elipsei sînt egale*, deci $a=b$ și deci $c=0$, *elipsa este un cerc cu raza a*.

Tangenta la elipsă într-un punct M este una din bisectoarele unghiului format de MF' și MF. Cealaltă este normala în M la elipsă.

De aici rezultă *proprietatea optică a elipsei:*

O rază de lumină ce pornește dintr-un focar, după reflectare pe o oglindă eliptică trece prin celălalt focar.

Mai amintim o proprietate utilă în aplicații și anume: proiecția unui cerc de rază a pe un plan ce face cu planul cercului un unghi ascuțit φ, așa ca să avem $\cos\varphi=b/a$, este o elipsă de semiaxe a și b. Cercul de rază a, se numește uneori *cerc principal* al elipsei.

6.1.1. Construcția elipsei printr-o mișcare continuă

În cele două focare F și F' se fixează capetele unui fir de lungime $2a$. Întinzînd acest fir cu un creion, vîrful acestuia va descrie o jumătate de elipsă (elipsa grădinarului).

6.1.2. Construcția prin puncte a elipsei

1° Cu centrele în F și F' ducem două cercuri ale căror raze au suma $2a$. Punctele lor de intersecție (dacă sînt) aparțin elipsei. Cercurile se intersectează numai dacă diferența razelor este mai mică decît distanța focală (presupunem că $2a>2c$).

2° Construim două cercuri concentrice cu razele a și b și centrul O (Fig. 6.3). Ducem diametrul Δ. Din O ducem o semidreaptă care taie cercurile în punctele E și F. Intersecția unei paralele duse prin F la Δ și a unei perpendiculare pe Δ dusă prin E, dă un punct al elipsei cu semiaxele a și b. Luînd diferite poziții pentru semidreapta OE, obținem diferite puncte ale elipsei. Axa mare a elipsei este după Δ.

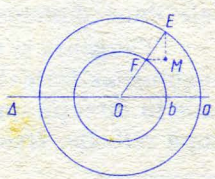


Fig. 6.3

6.2. HIPERBOLA

Se numește *hiperbolă*, locul geometric al punctelor M din plan a căror diferență a distanțelor la două puncte fixe F și F', numite *focare*, este în valoare absolută egală cu cantitatea pozitivă $2a$. Hiperbola are două axe de simetrie, una care trece prin focarele F, F', și care se numește *axa transversă*, deoarece traversează curba și mediatoarea segmentului FF'. Punctul lor de concurență este *centrul* hiperbolei (Fig. 6.4). Axa transversă intersectează hiperbola în punctele A și A', numite *vîrfurile* hiperbolei, care determină un segment de lungime $2a$. Dacă *distanța focală* este $2c$ și dacă $c^2=a^2+b^2$, construim dreptunghiul cu centrul în O și laturile paralele cu axele și de lungimi $2a$ și $2b$. Diagonalele acestui dreptunghi sînt *asimptotele*[1] hiperbolei. Hiperbola are două ramuri, pentru una dintre ele diferența distanțelor la focarele F' și F este $2a$, iar pentru cealaltă este $-2a$.

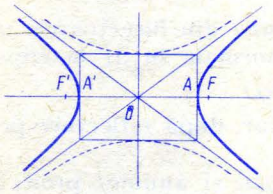


Fig. 6.4

Hiperbola ale cărei ramuri se găsesc în celelalte două regiuni ale planului determinate de asimptote și care are axa transversă $2b$, se numește hiperbola *conjugată* celei precedente.

Dacă $a=b$, hiperbola se numește *hiperbolă echilateră* și asimptotele ei sînt perpendiculare.

Pentru fiecare focar se poate pune în evidență cîte o dreaptă paralelă cu axa netransversă, numită *directoare* și așa ca raportul distanțelor unui punct de pe ramura alăturată focarului, la focar și directoare să fie o constantă e, numită excentricitate. Astfel pentru focarul F avem

$$\frac{MF}{MN}=\frac{c}{a}=e>1.$$

Cele două directoare taie fiecare cîte una din ramurile hiperbolei.

Tangenta și normala la hiperbolă într-un punct M, sînt bisectoarele unghiurilor formate de MF și MF'. Prin urmare o rază de lumină care cade în direcția unui focar, pe fața exterioară a unei oglinzi hiperbolice, după reflexie, trece prin celălalt focar *(proprietatea optică a hiperbolei)*.

---

[1]) O ramură infinită a unei curbe admite o dreaptă ca asimptotă, dacă distanța unui punct de pe curbă la dreaptă, tinde la zero cînd punctul tinde la infinit.

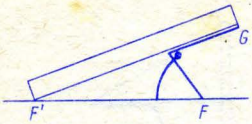


Fig. 6.5

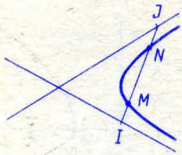


Fig. 6.6

6.2.1. Construirea hiperbolei printr-o mișcare continuă

O riglă se poate roti în jurul capătului F' al unei laturi $F'G$ a ei (Fig. 6.5). Capetele unui fir sînt fixate în punctele G și F. Firul este ținut întins pe latura riglei cu ajutorul vîrfului unui creion. Cînd rigla se rotește în jurul punctului F' creionul descrie o porțiune dintr-o hiperbolă.

6.2.2. Construirea prin puncte a hiperbolei

1° Din punctele F și F' ca centre trasăm două cercuri așa ca diferența razelor lor să fie în valoare absolută egală cu $2a$. Intersecția celor două cercuri dă două puncte ale unei ramuri ale curbei. Schimbînd între ele razele cercurilor obținem două puncte de pe cealaltă ramură. Cele două cercuri se intersectează numai dacă suma celor două raze este mai mare decît $2c$ (presupunem $2a<2c$).

2° Altă construcție se bazează pe proprietatea că dacă se cunoaște un punct M al unei hiperbole și dacă ducem prin el o dreaptă care taie hiperbola în al doilea punct N și asimptotele în I și J (Fig. 6.6), avem $MI=NJ$. Rotind dreapta în jurul punctului M obținem oricîte puncte ale hiperbolei. Pe de altă parte, ca punct M se poate lua vîrful hiperbolei.

6.3. PARABOLA

Se numește *parabolă*, locul geometric al punctelor egal depărtate de un punct fix F, numit *focar*, și o dreaptă fixă D numită *directoare* (Fig. 6.7) (focarul este exterior directoarei). Distanța de la focar la directoare se numește *parametrul* parabolei. Parabola este simetrică față de perpendiculara dusă din focar pe directoare, dreaptă care se numește *axa* parabolei. Intersecția ei cu parabola este vîrful parabolei și este la egală distanță de focar și directoare. Parabola are două ramuri infinite, care însă nu admit asimptote.

T.I. 63

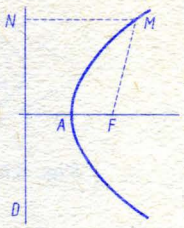


Fig. 6.7

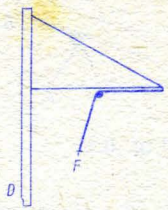


Fig. 6.8

Tangenta și normala la parabolă într-un punct M sînt bisectoarele unghiului format de MF și perpendiculara MN pe directoare. Rezultă *proprietatea optică a parabolei*: orice rază de lumină paralelă cu axa parabolei, după reflexie, trece prin focar.

6.3.1. Construirea parabolei printr-o mișcare continuă

Pe muchia unei rigle așezată de-a lungul directoarei, se deplasează o catetă a unui echer. Un fir de lungime egală cu a doua catetă este fixat în focar și în vîrful I al echerului care nu este pe directoare (Fig. 6.8). Cu vîrful unui creion, ținem firul întins așa ca o parte din el să fie pe a doua catetă a echerului. Cînd echerul este deplasat de-a lungul riglei, vîrful creionului descrie o porțiune dintr-o parabolă.

6.3.2. Construirea parabolei prin puncte

1° Obținem două puncte ale unei parabole intersectînd un cerc cu centrul în focar și cu o rază k, cu o paralelă la directoare aflată la distanța k de ea. Ca să existe asemenea puncte de intersecție trebuie ca raza k să fie mai mare decît jumătatea parametrului parabolei.

2° Împărțim în același număr de părți egale segmentele perpendiculare AB și AC (Fig. 6.9) și numerotăm punctele de subdiviziune începînd de la punctul A pe AB și începînd cu C pe CB. Prin punctele de subdiviziune de pe AB ducem perpendiculara la AB, iar punctele de subdiviziune de pe AC le unim cu B. Punctele de intersecție ale dreptelor din cele două familii care pornesc din puncte notate cu același număr, împreună cu B și C sînt situate pe o parabolă.

6.4. DEFINIȚIA UNITARĂ A CONICELOR

Locul geometric al punctelor din plan așa ca raportul distanțelor la un punct fix (numit focar) și o dreaptă fixă (numită *directoare*) să fie o constantă e, este o elipsă, parabolă sau hiperbolă, după cum $e<1$, $e=1$, sau $e>1$. Constanta e se numește *excentricitate*.

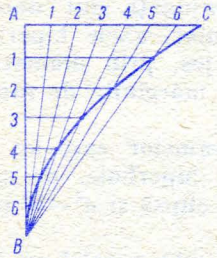


Fig. 6.9

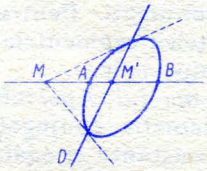


Fig. 6.10

6.5. POL ȘI POLARĂ LA O CONICĂ. DIAMETRI

Definiția este analoagă cu cea de la cerc (§ 2.5). Locul geometric al conjugatului armonic M' al unui punct M, față de punctele de intersecție AB cu conica ale unei secante ce trece prin M, este o dreaptă numită *polară* a punctului M prin raport cu conica (Fig. 6.10). Invers, fiind dată o dreaptă D, există un punct M a cărui polară să fie D. Punctul M se numește *polul* dreptei D față de conică.

Dacă punctul M este exterior conicei, polara este coarda care unește punctele de contact ale tangentelor duse din M la conică. Dacă punctul M este pe conică, definiția de mai sus a polarei nu mai are sens și prin definiție ea este tangenta în acel punct la conică.

Dacă polara unui punct M trece printr-un punct N, atunci polara lui N trece prin punctul M. Două asemenea *puncte* se numesc *conjugate prin raport cu conica*.

Dacă polul unei drepte D_1 se găsește pe dreapta D_2 atunci polul dreptei D_2 se găsește pe dreapta D_1. Două asemenea *drepte* se numesc *conjugate prin raport* cu conica.

Se numește *diametru* al unei conice, locul geometric al mijloacelor corzilor conicei, paralele cu o dreaptă dată. Diametrul conține și punctele de contact ale tangentelor la conică, paralele cu corzile consi-

derate. Locul geometric al mijloacelor corzilor conicei paralele cu un diametru, este tot un diametru numit *diametru conjugat* cu cel precedent. Dacă Δ' este diametrul conjugat cu Δ, atunci Δ este diametrul conjugat cu Δ'.

În cazul elipsei diametrii conjugați sînt două segmente interioare elipsei și care trec prin centrul ei. În particular, cele două axe sînt diametri conjugați.

În cazul hiperbolei, pentru această problemă se consideră și hiperbola conjugată. Așa fiind, diametrii conjugați sînt două drepte ce trec prin centrul hiperbolelor. În particular, axele hiperbolei sînt diametri conjugați. Pentru teorema de mai jos, prin diametri conjugați se înțeleg segmentele din aceste drepte mărginite de ramurile celor două hiperbole.

Teorema lui Apoloniu. Aria paralelogramelor care au ca laturi doi semidiametri conjugați unei elipse sau hiperbole, de semiaxe a și b, este constantă și egală cu a^2+b^2 pentru elipsă și a^2-b^2 pentru hiperbolă.

În cazul unei parabole, orice diametru este paralel cu axa și nu există diametri conjugați.

Capitolul II

GEOMETRIE ÎN SPAȚIU

7. DREPTE ȘI PLANE

7.1. GENERALITĂȚI

Prin definiție, *planul* este o suprafață infinită așa încît dreapta care trece prin două puncte oarecare ale acestei suprafețe este conținută în întregime în ea. Se admite că o asemenea suprafață există.

Se admite (axiomă) că prin trei puncte oarecare ale spațiului trece un plan. De asemenea (axiomă), dacă punctele sînt necoliniare, prin cele trei puncte trece un singur plan.

Din cauza acestei proprietăți fundamentale un plan care trece prin punctele A, B, C se notează ABC. Deseori însă planul se notează cu o singură literă. Pentru figurarea grafică, deși planul este o suprafață infinită, el se reprezintă ca o porțiune limitată de forma unui dreptunghi (în desen apare ca un paralelogram).

O dreaptă și un plan pot avea următoarele poziții relative:

— dreapta are două puncte comune cu planul; ea este deci *conținută în plan*;

— dreapta nu are decît un singur punct comun cu planul, se zice că ea *înțeapă* sau *taie* planul;

— dreapta nu are nici un punct comun cu planul, se zice că dreapta este *paralelă* cu planul.

Planul împarte spațiul în două regiuni, astfel încît dreapta care trece prin două puncte, unul dintr-o regiune și celălalt din cealaltă înțeapă planul. Orice dreaptă situată într-un plan îl împarte în două *semiplane*.

Din cele de mai sus rezultă că:

— două drepte care se intersectează sau sînt paralele, determină un singur plan,

— o dreaptă și un punct nesituat pe dreaptă determină un singur plan.

Două drepte pot fi *concurente*, *paralele*, sau *necuprinse în același plan*. Prin urmare pentru a arăta că două drepte sînt paralele, nu este suficient de a arăta că nu au nici un punct comun, ci trebuie arătat că ele sînt conținute în același plan. Prin urmare două drepte pot avea un singur punct comun, o infinitate de puncte (dacă ele coincid) și nici un punct comun.

Două plane distincte pot prezenta următoarele poziții relative:

— planele au un punct comun rezultînd că atunci au o dreaptă comună, numită *dreapta de intersecție* a celor două plane. Se zice în acest caz că ***planele se intersectează,***

— planele nu au nici un punct comun. Se zice în acest caz că ***planele sînt paralele.***

Trei plane pot avea următoarele poziții relative:

— cele trei plane au toate punctele comune, deci ele

— cele trei plane au în comun toate punctele unei drepte, se zice că planele **trec prin acea dreaptă,**

— cele trei plane au în comun un singur punct, se zice că planele **trec prin acel punct,**

— cele trei plane **nu au nici un punct comun.** Aceasta se poate întîmpla, dacă două sau trei dintre ele sînt paralele, sau dacă intersecția a două dintre ele este paralelă cu al treilea plan.

7.2. DREPTE ȘI PLANE PARALELE

Avem teoremele:

Printr-un punct se poate duce numai o singură paralelă la o dreaptă dată.

Dacă două drepte sînt paralele și dacă un plan este intersectat de una dintre ele, el este intersectat și de cealaltă.

Două drepte paralele cu a treia dreaptă sînt paralele între ele.

Orice dreaptă paralelă cu o dreaptă dintr-un plan și nesituată în plan, este paralelă cu planul.

Dacă două drepte sînt paralele, orice plan dus printr-una din drepte, trece prin cealaltă dreaptă, sau este paralel cu aceasta.

Dacă printr-o dreaptă D, paralelă cu planul P, se duce un plan Q, ce intersectează planul P după o dreaptă D', atunci dreptele D și D' sînt paralele (Fig. 7.1).

Dacă o dreaptă D, este paralelă cu un plan P, orice paralelă la dreapta D dusă printr-un punct M al planului, este în întregime cuprinsă în plan.

Orice dreaptă paralelă cu două plane care se intersectează, este paralelă cu dreapta de intersecție.

Printr-un punct se poate duce un singur plan paralel la un plan dat.

Dacă două plane sînt paralele, orice dreaptă paralelă cu unul dintre plane, este paralelă cu celălalt plan, sau cuprinsă în plan.

Două plane paralele cu un al treilea sînt paralele între ele.

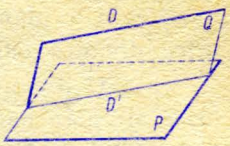


Fig. 7.1

Dacă două plane sînt paralele orice dreaptă și orice plan care intersectează unul dintre plane îl intersectează și pe celălalt. Intersecțiile cu planul sînt în plus paralele.

Segmentele de pe două drepte paralele cuprinse între două plane paralele, sînt egale.

Trei plane paralele determină, pe două drepte secante, segmente proporționale și reciproc (Cum dreptele care intervin sînt paralele, ele se pot orienta, orientarea pentru una fiind aceeași pentru toate paralelele ei. Proporționalitatea de mai sus se poate referi atunci nu numai la lungimile segmentelor, ci și la măsurile lor).

Locul geometric al dreptelor ce trec printr-un punct M și care sînt paralele cu un plan P, este planul Q, paralel cu P și care trece prin M.

Dacă două unghiuri nesituate în același plan, au laturile două cîte două paralele, atunci planele unghiurilor sînt paralele, iar unghiurile sînt egale sau suplimentare.

Definiție. Prin *unghi a două drepte* care nu se intersectează, se înțelege unghiul format de paralelele la cele două drepte duse printr-un punct oarecare. Două drepte se zic *perpendiculare* dacă ele formează unghiuri drepte.

7.3. DREPTE ȘI PLANE PERPENDICULARE

Definiție. Se zice că o dreaptă este *perpendiculară* pe un plan dacă ea este perpendiculară pe orice dreaptă din plan.

Punctul de intersecție al perpendicularei cu planul se numește *piciorul perpendicularei*. Orice dreaptă care nu este nici paralelă nici perpendiculară la un plan se numește *oblică*. Se numește *distanța unui punct la un plan*, lungimea segmentului de la punct la piciorul perpendicularei coborîte din punct pe plan.

Distanța dintre două plane paralele este distanța de la un punct al unui plan la celălalt plan, iar *distanța de la o dreaptă la un plan paralel cu ea* este distanța de la un punct al dreptei la plan.

Rezultă consecințele:

— Un plan perpendicular pe o dreaptă este perpendicular pe orice dreaptă paralelă cu aceasta.

— O dreaptă perpendiculară pe un plan, este perpendiculară pe orice alt plan paralel cu acesta.

Avem teoremele:

— Locul geometric al punctelor egal depărtate de două puncte A și B, este planul perpendicular pe mijlocul segmentului AB. Punctele A și B se zic *simetrice* față de plan.

— Condiția necesară și suficientă ca o dreaptă să fie perpendiculară pe un plan, este ca ea să fie perpendiculară pe două drepte neparalele situate în plan sau paralele cu acest plan.

— Printr-un punct din spațiu se poate duce un singur plan perpendicular pe o dreaptă dată.

— Dacă două drepte sînt paralele, orice plan perpendicular pe una dintre ele este perpendicular și pe cealaltă și reciproc.

— Dacă două plane sînt paralele, orice dreaptă perpendiculară pe un plan este perpendiculară și pe celălalt plan și reciproc.

— Dacă dintr-un punct exterior unui plan ducem o perpendiculară și diverse oblice, între lungimile lor avem relațiile: perpendiculara este mai scurtă decît orice oblică; două oblice egal depărtate de piciorul perpendicularei sînt egale; dintre două oblice inegal depărtate de piciorul perpendicularei, cea mai depărtată este mai lungă decît cealaltă. Avem și proprietățile reciproce, de exemplu: dacă două oblice duse din același punct sînt egale, picioarele lor sînt egal depărtate de piciorul perpendicularei coborîte din același punct pe plan.

— Locul geometric al perpendicularelor duse dintr-un punct la o dreaptă este planul perpendicular dus din punct pe dreaptă (Contrar cu ceea ce se întîmplă în plan, avem o infinitate de asemenea perpendiculare. Cînd dorim să ne referim la perpendiculara care întîlnește dreapta, vom zice perpendiculara pe dreaptă, iar pentru toate celelalte perpendiculare zicem perpendiculara la dreaptă. *Distanța de la un punct la o dreaptă* se măsoară pe prima dintre ele).

Teorema celor trei perpendiculare. Dacă dintr-un punct A, exterior unui plan P, ducem perpendiculara AB pe plan (B fiind piciorul perpendicularei) și perpendiculara AC pe o dreaptă Δ din plan (Fig. 7.2), atunci dreapta BC este perpendiculară pe Δ. Reciproc, dacă AB este perpendiculară pe planul P și BC perpendiculară pe dreapta Δ din planul P, atunci AC este perpendiculară pe Δ.

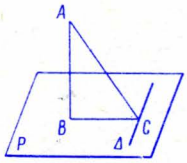


Fig. 7.2

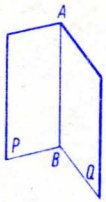


Fig. 7.3

7.4. UNGHIURI DIEDRE. PLANE PERPENDICULARE. UNGHIURI POLIEDRE

Se numește *unghi diedru*, sau pe scurt *diedru*, figura formată de două semiplane care pornesc din aceeași dreaptă, numită *muchia* diedrului (Fig. 7.3). Cele două semiplane se numesc *fețele diedrului*. Diedrul se notează de obicei cu literele care marchează muchia diedrului. În cazul cînd este nevoie de mai multă precizie, literele precedente se intercalează între literele care desemnează fețele diedrului. Astfel diedrul din figura alăturată se notează fie AB, fie $PABQ$. Două diedre se zic *egale*, dacă ele se pot suprapune. Două diedre se zic *adiacente*, cînd au aceeași muchie, cînd una din fețe este comună, iar celelalte sînt de o parte și de alta a feței comune.

Se numește *plan bisector* al unui unghi diedru, planul care trece prin muchia diedrului și-l împarte în două unghiuri diedre egale.

Se numesc *diedre opuse* la muchie, două diedre astfel ca fețele unuia să fie în prelungirea celuilalt.

Să considerăm două unghiuri diedre adiacente $QABP$, $PABQ'$ fețele necomune fiind în prelungire (Fig. 7.4). Dacă cele două diedre nu sînt egale, semiplanul P se zice că este *oblic* planului Q, dacă însă ele sînt egale, semiplanul P se zice *perpendicular* pe planul Q. Rezultă că două plane se zic *perpendiculare*, dacă ele formează patru diedre egale. Fiecare din acestea se numește *diedru drept*. Noțiunile de la unghiuri (ascuțit, obtuz, complementar, suplimentar, opuse la vîrf) se extind și pentru unghiurile diedre. Se utilizează uneori noțiunea de *plan mediator* al unui segment, pentru planul perpendicular pe acel segment și care trece prin mijlocul lui.

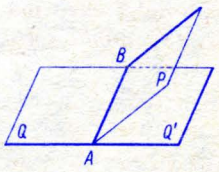


Fig. 7.4

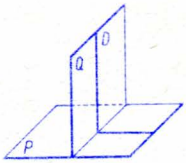


Fig. 7.5

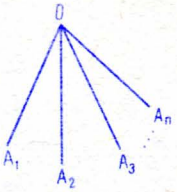


Fig. 7.6

Dacă o dreaptă D este perpendiculară pe un plan P, orice plan care conține pe D este perpendicular pe planul P (Fig. 7.5).

Dacă două plane sînt perpendiculare și dacă dintr-un punct al unuia ducem o perpendiculară la celălalt, aceasta este situată în primul plan.

Planul perpendicular la două plane care se intersectează este perpendicular pe dreapta lor de intersecție.

Dacă trei plane sînt perpendiculare două cîte două, același lucru se întîmplă cu dreptele lor de intersecție și reciproc.

Printr-o dreaptă dată se poate duce un plan perpendicular pe un plan dat și se poate duce numai unul singur, dacă dreapta nu este perpendiculară pe planul dat.

Se numește *unghi plan* al unui diedru, unghiul format de două semidrepte perpendiculare pe muchia diedrului și situate în cele două fețe ale diedrului. Acest unghi plan este același oricare ar fi punctul din care se duc semidreptele.

Două unghiuri diedre egale au unghiurile lor plane egale și reciproc.

Unghiul plan al unui diedru drept este drept, și reciproc.

Luînd ca unitate de măsură a diedrelor diedrul care are ca unghi plan, unghiul unitate, rezultă că măsura unui diedru este aceeași ca și a unghiului său plan.

Să considerăm o mulțime ordonată de n semidrepte OA_1, OA_2, ...,OA_n și porțiunile de plane mărginite de două semidrepte consecutive și de OA_n, OA_1 (Fig. 7.6.). **Figura OA_1, A_2 ...A_n formată de aceste porțiuni de plane și care mărginește un domeniu infinit, se numește *unghi poliedru*, sau *unghi solid*.**

La un unghi poliedru se distinge *vîrful* O, *muchiile* OA_1, OA_2, ...,OA_n, fețele A_1OA_2, A_2OA_3, ...,A_nOA_1, *unghiurile fețelor* A_1OA_2, A_2OA_3, ...,A_nOA_1 și unghiurile diedre formate de cîte două fețe consecutive.

Dacă $n=3$, avem un *unghi triedru* sau pe scurt *triedru*. Un triedru în care unghiurile fețelor sînt unghiuri drepte, se numește *triedru tri-*

dreptunghic. Un triedru $OA_1A_2A_3$ se zice *direct orientat*, dacă rotind pe OA_1 în jurul lui O, pentru a-l suprapune cu OA_2 (pe drumul cel mai scurt) obținem pentru OA_3 sensul de înaintare al burghiului. În caz contrar, triedrul se zice *invers orientat*.

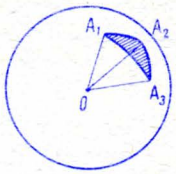


Fig. 7.7

Pentru $n \geqslant 4$, această prescurtare nu se mai face, căci noțiunea de poliedru are alt conținut decît cea de unghi poliedru (§8).

Se zice că un unghi poliedru este *convex*, dacă întreaga figură este de o parte a oricăruia dintre planele fețelor. Dacă se unesc vîrfurile unui poligon convex cu un punct exterior planului poligonului, se obține un unghi poliedru convex. Reciproc, dacă un unghi poliedru convex se intersectează cu un plan care să intersecteze toate muchiile (și nu prelungirile lor) se obține un poligon convex. În particular, un triedru este totdeauna convex. Rezultatele mai importante sînt următoarele:

Într-un triedru unghiul unei fețe oarecare este mai mic decît suma unghiurilor celorlalte fețe.

Suma unghiurilor fețelor unui unghi poliedru este mai mică decît patru unghiuri drepte.

Pentru măsurarea unghiurilor poliedre se construiește o *sferă unitate* cu centrul în vîrful unghiului și raza unitate. Ca măsură a unghiului poliedru se ia aria porțiunii din sferă decupată de fețele unghiului (Fig. 7.7). Așa fiind, orice unghi poliedru este mai mic sau egal cu 4π (aria sferei unitate) (E de remarcat asemănarea cu noțiunea de radian introdusă pentru măsurarea unghiurilor plane).

Noțiunea de unghi poliedru se extinde pentru cazul cînd numărul fețelor tinde la infinit obținîndu-se o suprafață conică (§10.2). Denumirea figurii este în acest caz numai de *unghi solid*, iar măsura lui se introduce ca mai sus.

7.5. PROIECȚII
ALTE PROBLEME REFERITOARE LA DREPTE ȘI PLANE

7.5.1. Proiecții pe un plan

Fie o dreaptă Δ și un plan P, care nu trece prin Δ. Se numește proiecție, paralelă cu dreapta Δ, a unui punct M pe planul P, punctul

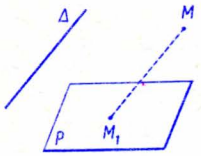


Fig. 7.8

M_1 de intersecție a planului P cu paralela la Δ ce trece prin M (Fig. 7.8). Dreapta Δ se numește *dreaptă directoare*, planul P *plan de proiecție*, dreapta MM_1 *dreaptă proiectantă*, iar operația definită *proiecție paralelă*. Proiecția paralelă cu dreapta Δ a unei figuri, este figura formată cu proiecțiile punctelor figurii. Este evident că punctele planului P sînt propriile lor proiecții și că toate punctele unei drepte paralele cu dreapta Δ se proiectează în același punct.

Avem proprietățile:

— Proiecția unei drepte este tot o dreaptă, ————————

— Proiecțiile aceleiași figuri pe două plane paralele, sînt egale.

— Proiecțiile pe același plan a două drepte paralele sînt drepte paralele.

— Un unghi drept cu o latură paralelă cu planul de proiecție se proiectează după un unghi drept, și reciproc.

În aplicații cel mai des se alege ca dreaptă Δ o perpendiculară la planul P. Proiecția astfel obținută se numește *proiecție ortogonală*, sau pe scurt *proiecție*. Pe viitor vom presupune că este vorba *numai* de proiecții ortogonale.

Se numește unghi dintre o dreaptă și un plan unghiul format de dreaptă cu proiecția ei (ortogonală) pe plan. Avem proprietățile:

— Dacă prin punctul de intersecție al unei drepte cu un plan, ducem în plan diferite drepte, cea care face cu dreapta dată cel mai mic unghi, este proiecția dreptei pe plan.

— Aria proiecției unui triunghi pe un plan este egală cu produsul ariei triunghiului prin cosinusul unghiului ascuțit făcut de planul triunghiului cu planul de proiecție. Teorema se extinde la proiecția pe un plan a unui poligon plan oarecare.

7.5.2. Perpendiculara comună la două drepte

Dacă două drepte nu sînt situate în același plan atunci există o dreaptă perpendiculară pe ele, numită **perpendiculară comună** a acelor drepte. Luînd un punct M_1 pe una din drepte și un punct M_2 pe cealaltă, minimul distanței M_1M_2, cînd punctele M_1, M_2 variază, se numește *cea mai mică distanță dintre cele două drepte*. Aceasta este lungimea segmentului determinat pe perpendiculara comună de intersecțiile ei cu cele două drepte. Pentru a construi această perpendi-

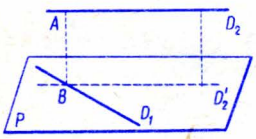


Fig. 7.9

culară comună a dreptelor D_1 și D_2, prin dreapta D_1 ducem un plan P paralel cu dreapta D_2. Fie D_2' proiecția dreptei D_2 pe planul P_2 (Fig. 7.9). Perpendiculara comună este AB, unde B este intersecția dreptelor D_2' și D_1 iar A punctul de pe D_2 care se proiectează în B.

8. POLIEDRE

8.1. GENERALITĂȚI

Se numește *poliedru* o figură geometrică mărginită de porțiuni plane numite fețele poliedrului. Toate fețele formează *suprafața poliedrului*. Aceste fețe sînt poligoane, (corect: sînt mărginite de poligoane; § 3) ale căror laturi și vîrfuri se numesc *muchiile*, respectiv *vîrfurile* poliedrului. Fiecare muchie este comună la două fețe și fiecare vîrf este comun la cel puțin trei fețe. Orice dreaptă care unește două vîrfuri nesituate pe aceeași față se numește *diagonală* a poliedrului. Muchiile corespunzătoare unui vîrf determină un *unghi poliedru* (unghi solid) al poliedrului. Două fețe alăturate determină un *unghi diedru* al poliedrului.

Un poliedru se zice *convex*, dacă el este situat de aceeași parte în raport cu planul fiecărei fețe. În caz contrar, el se zice *concav*. Fețele unui poliedru convex sînt poligoane convexe. O dreaptă oarecare nu poate intersecta suprafața unui poliedru convex în mai mult de două puncte. Avem teorema lui *Euler*: în orice poliedru convex, suma dintre numărul fețelor F și vîrfurilor V este egală cu numărul muchiilor, M, mărit cu doi, deci

$$F+V=M+2.$$

Un poliedru convex se zice *regulat*, dacă toate fețele sînt poligoane regulate egale și dacă toate unghiurile poliedre sînt egale (deci toate unghiurile diedre sînt egale).

Cel mai simplu poliedru este *tetraedrul*, el are 4 fețe toate triunghiuri și este totdeauna convex. Poliedrele cu 5, 6, 8, 12 și 20 fețe se numesc *pentaedru*, *hexaedru*, *octaedru*, *dodecaedru* și *icosaedru*. Pentru studiul lor, poliedrele nu se clasifică după numărul fețelor lor, din cauza diversității mari ce există în îmbinarea acestora, ci se consideră două mari familii de poliedre: prismele și piramidele.

8.2. PRISMA

Se numește *prismă* un poliedru în care două dintre fețe numite *baze* sînt două poligoane egale situate în plane paralele (Fig. 8.1). Cele-

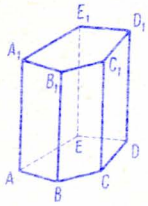


Fig. 8.1

laltе fețe, numite *fețe laterale*, sînt paralelograme avînd fiecare cîte o latură comună cu fiecare dintre baze. Fețele laterale sînt delimitate, afară de poligoanele bazelor, de muchii egale și paralele, numite muchii laterale (Fig. 8.1). Fețele laterale formează *suprafața laterală* a prismei. Aceasta împreună cu cele două baze constituie *suprafața totală* a prismei. Distanța dintre bazele prismei se numește *înălțimea* prismei. Prisma se numește *dreaptă*, dacă muchiile laterale sînt perpendiculare pe baze și *oblică*, în caz contrar. **O prismă se numește *regulată*, dacă este dreaptă și dacă baza este un poligon regulat.** Se numește *secțiune dreaptă* a unei prisme poligonul obținut intersectînd prisma cu un plan perpendicular pe muchiile laterale (acestea fiind la nevoie prelungite).

***Aria laterală* a unei prisme este egală cu suma ariilor fețelor laterale, deci cu produsul dintre lungimea unei muchii laterale cu perimetrul unei secțiuni drepte.**

***Volumul* unei prisme este egal cu produsul dintre aria bazei cu înălțimea, sau cu produsul dintre lungimea unei muchii cu aria secțiunii drepte.**

8.2.1. Paralelipipedul

Se numește *paralelipiped* o prismă cu bazele paralelograme. Rezultă că un paralelipiped este determinat dacă se dau în mărime și poziție cele trei muchii care se întîlnesc într-un vîrf. **Paralelipipedul poate fi *drept* sau *oblic*. Un paralelipiped drept care are bazele dreptunghiuri se numește *paralelipiped dreptunghic* (sau uneori *paralelipiped tridreptunghic*), muchiile lui care pornesc dintr-un vîrf determină un triedru tridreptunghic. Un paralelipiped dreptunghic cu toate muchiile egale se numește *cub*. Un paralelipiped oblic, avînd fețele mărginite de romburi egale, se numește *romboedru*.** Ca baze ale unui paralelipiped se pot lua oricare două fețe opuse, care sînt egale și paralele.

Un paralelipiped are patru diagonale, care se intersectează în mijloacele lor. Ele sînt toate egale, dacă paralelipipedul este dreptunghic.

Volumul unui paralelipiped dreptunghic este egal cu produsul lungimilor a trei muchii care pornesc dintr-un vîrf și care se numesc *dimensiunile* lui.

Volumul unui cub este egal cu puterea a treia a lungimii laturii.

8.3. PIRAMIDA

Se numește piramidă un poliedru în care toate fețele, afară de una numită *bază*, au un vîrf comun, numit *vîrful piramidei*. Fețele care au în comun vîrful piramidei se numesc *fețele laterale* și ele sînt triunghiuri în timp ce baza este un poligon oarecare (Fig. 8.2). Fețele laterale formează *suprafața laterală*, care împreună cu baza formează *suprafața totală* a piramidei. Distanța de la vîrful piramidei la bază se numește *înălțimea* piramidei.

Dacă baza piramidei este un triunghi, piramida este un tetraedru. Într-un tetraedru se poate lua ca bază oricare dintre fețe, iar ca vîrf, vîrful opus acesteia.

Se numește *piramidă regulată*, piramida în care baza este un poligon regulat și piciorul înălțimii dusă din vîrful piramidei este în centrul poligonului. Într-o piramidă regulată muchiile laterale sînt egale, deci fețele laterale sînt triunghiuri isoscele egale. Înălțimea coborîtă din vîrful piramidei a uneia din aceste fețe laterale se numește *apotema* piramidei. Piramida în care toate fețele și baza sînt triunghiuri echilaterale egale, se numește *tetraedru regulat*.

Dacă se secționează piramida cu un plan oarecare și se elimină piramida care are ca bază secțiunea făcută, obținem un *trunchi de piramidă* (Fig. 8.2). Acesta are două baze poligoane cu același număr de laturi, fețele laterale fiind patrulatere. În cazul cînd bazele sînt paralele (deci planul de secțiune a fost paralel cu baza piramidei), fețele laterale sînt trapeze. Distanța dintre bazele paralele este *înălțimea* trunchiului de piramidă. Dacă trunchiul de piramidă cu baze paralele a provenit dintr-o piramidă regulată, el se numește *trunchi de piramidă regulat*. Înălțimea uneia dintre fețele laterale este *apotema* sa.

Dacă o piramidă este tăiată cu un plan paralel cu baza, muchiile laterale și înălțimea sînt împărțite în părți proporționale. Secțiunea făcută este un poligon asemenea cu baza, iar aria secțiunii și aria bazei sînt între ele ca pătratele distanțelor lor de la vîrful piramidei.

Aria laterală a unei piramide regulate este egală cu produsul apotemei cu semiperimetrul bazei.

Aria laterală a unui trunchi de piramidă regulat este egală cu produsul dintre apotemă și semisuma perimetrelor bazelor.

Volumul V a unei piramide este a treia parte din produsul înălțimii h cu aria bazei B, deci

$$V=\frac{hB}{3}.$$

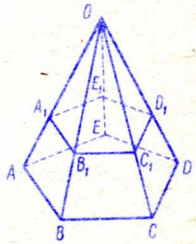


Fig. 8.2

Volumul V al unui trunchi de piramidă cu baze paralele de arii b, B și înălțime h, este

$$V=\frac{h}{3}\left(b+B+\sqrt{bB}\right).$$

8.4. TRUNCHIUL DE PRISMĂ

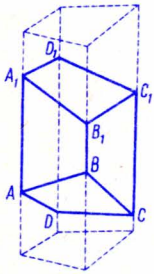


Fig. 8.3

Se numește *trunchi de prismă* solidul obținut dintr-o prismă și mărginit de două plane neparalele care întîlnesc toate muchiile prismei (Fig. 8.3). Secțiunile în prismă ale celor două plane se numesc *bazele* trunchiului de prismă.

Volumul unui trunchi de prismă triunghiulară este egal cu produsul dintre aria unei secțiuni drepte (perpendiculară pe muchiile prismei) cu a treia parte din suma muchiilor laterale.

8.5. POLIEDRE REGULATE

Orice poliedru regulat poate fi înscris într-o sferă de rază R și circumscris unei sfere de rază r.

Nu există decît cinci tipuri de poliedre regulate: tetraedrul, hexaedrul, octaedrul, dodecaedrul și icosaedrul (de fapt teorema este mai generală: nu există decît cinci tipuri de poliedre avînd toate fețele cu același număr de laturi și toate unghiurile solide cu același număr de muchii). Notînd cu m numărul laturilor unei fețe și cu n numărul muchiilor fiecărui unghi poliedru al poliedrului regulat, teorema rezultă din condiția ce trebuie să fie îndeplinită

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}>\frac{1}{2}$$

Ținînd seama de teorema lui Euler (§8.1)

$$F+V=M+2,$$

unde F, V, M sînt numărul fețelor, vîrfurilor și muchiilor poliedrului, între care avem $mF=2N$ și $nV=2N$, inegalitatea precedentă devine

Poliedre regulate

Poliedrul	fețe F	vîrfuri V	muchii M	laturi fețe m	muchii în vîrfuri n	raza sferei în funcție de muchia a		Unghi diedru α	
						circumscrise	înscrise		
						R	r		
Tetraedru	4	4	6	3	3	$\frac{1}{4}a\sqrt{6}$	$\frac{1}{12}a\sqrt{6}$	$\cos\alpha=\frac{1}{3}$	a
Hexaedru (cub)	6	8	12	4	3	$\frac{1}{2}a\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}a$	$\cos\alpha=0$	
Octaedru	8	6	12	3	4	$\frac{1}{2}a\sqrt{2}$	$\frac{1}{6}a\sqrt{6}$	$\cos\alpha=-\frac{1}{3}$	$2a$
Dodeca-edru	12	20	30	5	3	$\frac{1}{4}a(\sqrt{15}+\sqrt{3})$	$\frac{1}{2}a\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}$	$\operatorname{tg}\alpha=-2$	$2a^2\sqrt{2}$
Icosaedru	20	12	30	3	5	$\frac{1}{2}a\sqrt{\frac{5+\sqrt{15}}{2}}$	$\frac{1}{2}a\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{6}}$	$\sin\alpha=\frac{2}{3}$	5

Poliedre regulate

raza sferei înscrie de muchia a		Unghi diedru	Aria	Volumul
ise	înscrise			
	r	α	S	V
	$\frac{1}{12}a\sqrt{6}$	$\cos\alpha=\frac{1}{3}$	$a^2\sqrt{3}$	$\frac{1}{12}a^3\sqrt{2}$
	$\frac{1}{2}a$	$\cos\alpha=0$	$6a^2$	a^3
	$\frac{1}{6}a\sqrt{6}$	$\cos\alpha=-\frac{1}{3}$	$2a^2\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}a^3\sqrt{2}$
$\sqrt{3})$	$\frac{1}{2}a\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}$	$\operatorname{tg}\alpha=-2$	$2a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}$	$\frac{5}{2}a^3\sqrt{\frac{47+21\sqrt{5}}{10}}$
$\sqrt{15}$	$\frac{1}{2}a\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{6}}$	$\sin\alpha=\frac{2}{3}$	$5a^2\sqrt{3}$	$\frac{5}{12}a^3(3+\sqrt{5})$

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{M}.$$

Valorile celor cinci parametri împreună cu alte elemente utile, se găsesc în tabelul din pagina 91.

9. ELEMENTE DE ALGEBRĂ VECTORIALĂ

9.1. DEFINIȚII

O mărime care, după ce a fost aleasă o unitate de măsură, poate fi complet determinată printr-un singur număr, se numește *mărime scalară* sau *scalar*. Astfel masa unui corp, volumul unei camere, temperatura într-un anumit punct, sînt exemple de mărimi scalare. **O mărime se numește *mărime vectorială*, sau *vector*, dacă pentru caracterizarea ei este nevoie de un număr, dar și de indicarea direcției și sensului în care acționează.** Astfel de mărimi sînt forța care acționează asupra unui corp material, viteza unei mașini etc. Vectorii se reprezintă prin segmente de dreaptă orientate, deci pentru care se precizează care este începutul (originea) și care este sfîrșitul segmentului (extremitatea). Aceasta se face punînd o săgeată la acest din urmă capăt. Astfel în Fig. 9.1 originea este A și extremitatea este B și vectorul se notează $\vec{AB}$ sau $\mathbf{AB}$, sau cu o singură literă $\mathbf{a}$ (litere grase). Lungimea vectorului se notează $|\vec{AB}|$, sau $|\mathbf{AB}|$, sau $|\mathbf{a}|$.

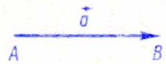


Fig. 9.1

Un vector este caracterizat prin:

— punctul de aplicație,

— suportul (dreapta pe care este plasat),

— sensul pe suport,

— lungimea lui numită modul.

Deosebim trei feluri de vectori:

— *vectorii legați*, pentru care trebuie să cunoaștem cele patru elemente de mai sus,

— *vectorii alunecători*, care se pot deplasa de-a lungul suportului lor. Astfel de vectori sînt forțele care acționează asupra corpurilor solide,

— *vectorii liberi*, care se pot deplasa paralel cu ei înșiși păstrîndu-și lungimea și sensul.

Pentru viitor *ne vom ocupa numai cu vectorii liberi*, ale căror elemente ce-i caracterizează sînt:

— lungimea,
— direcția,
— sensul.

Prin direcția unui vector, se înțelege orientarea lui în spațiu. Toate dreptele paralele din spațiu au aceeași direcție. Pe fiecare din aceste drepte se pot pune în evidență două sensuri.

Doi vectori se numesc *egali*, sau *echipolenți*, dacă ei au aceeași lungime, au aceeași direcție (suporturi paralele, sau confundate) și au același sens. Între doi asemenea vectori nu se face nici o deosebire.

Se numește *vector nul*, orice vector care are lungimea nulă.

Se numește *versor*, vectorul de lungime unitate.

Doi vectori se numesc *coliniari*, dacă au aceeași direcție.

Trei vectori se numesc *coplanari*, dacă sînt situați în același plan, sau în plane paralele.

Se numește *axă* o dreaptă pe care s-a ales o origine, o unitate de măsură și s-a fixat un sens direct. Se numește *versor al axei* versorul care are aceeași direcție și sens ca și axa.

9.2. OPERAȚII CU VECTORI

9.2.1. Adunarea vectorilor

Prin *suma* a doi vectori **a** și **b**, notație **a+b**, se înțelege un vector care, dacă vectorul **b** a fost deplasat cu originea în extremitatea lui **a**, are originea în originea lui **a** și extremitatea în extremitatea lui **b**

Adunarea vectorilor se poate face și după *regula paralelogramului* și anume: dintr-un punct O din plan, se duc vectori echipolenți cu **a** și **b**. Vectorul sumă se găsește pe diagonala ce trece prin O, a paralelogramului format pe cei doi vectori (Fig. 9.3). Operația de adunare a vectorilor este comutativă și asociativă, deci

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}, \quad \mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})=(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}$$

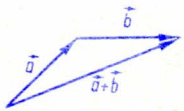


Fig. 9.2

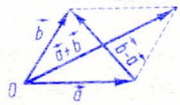


Fig. 9.3

Prin *diferența* a doi vectori, notația $\mathbf{b}-\mathbf{a}$, se înțelege un vector $\mathbf{d}=\mathbf{b}-\mathbf{a}$, așa ca $\mathbf{b}=\mathbf{a}+\mathbf{d}$. Vectorul diferență se găsește pe a doua diagonală a paralelogramului format pe vectorii $\mathbf{a}$ și $\mathbf{b}$ (Fig. 9.3).

Suma vectorilor $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots\ldots, \mathbf{a}_n$ este vectorul care închide conturul poligonal format așezînd unul după altul vectorii, astfel ca extremitatea unuia să coincidă cu originea următorului (Fig. 9.4).

Suma a trei vectori necoplanari este un vector, situat pe diagonala paralelipipedului format pe cei trei vectori, deplasați astfel ca să aibă aceeași origine (Fig. 9.5).

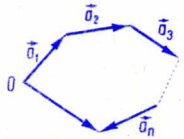


Fig. 9.4

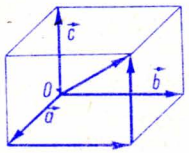


Fig. 9.5

9.2.2. Înmulțirea unui vector cu un scalar

Produsul dintre vectorul $\mathbf{a}$ și scalarul α, este un vector notat $\alpha\mathbf{a}$, care are aceeași direcție cu $\mathbf{a}$, același sens sau sens contrar cu $\mathbf{a}$, după cum $\alpha>0$ sau $\alpha<0$ și lungimea egală cu $|\alpha||\mathbf{a}|$. Operația are proprietățile

$$(\alpha+\beta)\mathbf{a}=\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{a},\quad \alpha(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\alpha\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b},\quad \alpha(\beta\mathbf{a})=(\alpha\beta)\mathbf{a}.$$

Primele două arată distributivitatea față de adunarea scalarilor, respectiv a vectorilor, iar ultima asociativitatea.

Dacă $\alpha=-1$, avem vectorul $-\mathbf{a}$, *opusul* lui $\mathbf{a}$. Cu ajutorul lui se poate efectua scăderea.

Se numește *versor al unui vector*, versorul care are aceeași direcție și sens ca și vectorul. Dacă $\mathbf{a}_0$ este versorul vectorului $\mathbf{a}$ și $|\mathbf{a}|$ este modulul lui, avem $\mathbf{a}=|\mathbf{a}|\mathbf{a}_0$, deci versorul unui vector $\mathbf{a}$ este

$$\mathbf{a}_0=\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}.$$

Este foarte importantă teorema:

O condiție necesară și suficientă ca doi vectori $\mathbf{a}$ și $\mathbf{b}$ să fie coliniari este să avem $\mathbf{b}=m\mathbf{a}$, unde m este un scalar.

9.2.3. Proiecția unui vector pe o axă

9.2.3.1. Vectori în plan. Fie o axă $x'x$, numită *axă de proiecție* și o dreaptă Δ, numită *dreaptă directoare* neparalelă cu axa. **Se numește proiecție, paralelă cu dreapta Δ, a punctului M pe axa $x'x$, punctul M' de intersecție cu $x'x$ a paralelei la Δ ce trece prin M.** Dreapta MM' se numește *dreaptă proiectantă*, iar operația *proiecție paralelă* (Fig. 9.6). Punctele axei sînt propriile lor proiecții, iar punctele unei drepte paralelă cu Δ se proiectează toate în același punct.

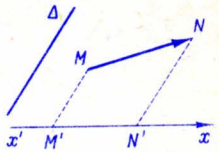


Fig. 9.6

Fie vectorul **MN** și M', N' proiecțiile capetelor lui. **Vectorul M'N' se numește *vector proiecție* al vectorului MN, iar măsura lui $[M'N']$ pe axa de proiecție se numește *proiecția* vectorului MN pe axa $x'x$.** Reamintim că $[M'N']$ este pozitivă sau negativă, după cum **M'N'** are același sens sau nu cu sensul direct de pe axă, (§ 1.1). Se vede ușor că vectorii egali au pe aceeași axă, proiecții egale.

Pe viitor vom considera numai *proiecții ortogonale* pe axa $x'x$, deci cazul cînd directoarea este perpendiculară pe axă. Pentru acestea, proiecția vectorului **MN** pe axă este egală cu produsul dintre modulul vectorului și cosinusul unghiului φ (măsurat în sens direct trigonometric) făcut de versorul axei $x'x$ cu vectorul **MN** (notație pr **MN**) (Fig.9.7)

$$\text{pr } \mathbf{MN} = [M'N'] = |\mathbf{MN}| \cos \varphi.$$

9.2.3.2. Vectori în spațiu. Fie în spațiu o *axă de proiecție* $x'x$ și un *plan director* P, neparalel cu axa (Fig. 9.8). **Prin proiecția unui punct M pe axa $x'x$ se înțelege punctul M' de intersecție al axei cu un plan paralel cu planul P și care trece prin punctul M.** Orice plan paralel cu planul P se numește *plan proiectant*, iar operația se numește *proiecție paralelă*. Toate punctele unui plan proiectant au aceeași proiecție, iar punctele axei sînt propriile lor proiecții.

Notînd cu M' și N' proiecțiile extremităților vectorului **MN** pe axă, **vectorul M'N' se numește *vector proiecție* al vectorului MN, iar**

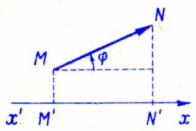


Fig. 9.7

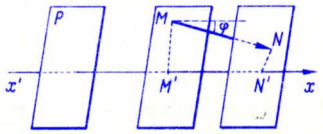


Fig. 9.8

măsura lui $[MN]$ se numește proiecția vectorului MN pe axă (notație pr MN). Rezultă că vectorii egali au proiecții egale.

În cazul *proiecțiilor ortogonale*, singura pe care o vom utiliza în viitor, avem

$$\text{pr}\,\mathbf{MN}=[M'N']=|\mathbf{MN}|\cos\varphi,$$

unde φ este cel mai mic dintre cele două unghiuri pe care le fac vectorul **MN** și versorul axei (unghiurile în spațiu nu se pot orienta).

Și în plan și în spațiu avem teoremele:

— Proiecția sumei unor vectori este egală cu suma proiecțiilor vectorilor deci:

$$\text{pr}(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\ldots+\mathbf{a}_n)=\text{pr}\,\mathbf{a}_1+\text{pr}\,\mathbf{a}_2+\ldots+\text{pr}\,\mathbf{a}_n.$$

— Proiecția produsului dintre un vector și un scalar este egală cu produsul dintre scalar și proiecția vectorului, deci:

$$\text{pr}(\alpha\mathbf{a})=\alpha\,\text{pr}\,\mathbf{a}.$$

9.2.4. Descompunerea unui vector după una, două sau trei direcții

1° Să presupunem că vectorii **v** și **a** sînt coliniari. Am văzut că avem (§ 9.2.2) $\mathbf{v}=m\mathbf{a}$, unde m este un scalar pozitiv sau negativ, după cum vectorii **a** și **v** au același sens sau nu. $|m|$ este cîtul modulelor vectorilor **v** și **a**. În cazul particular cînd vectorul **a** este versorul **i** al unei axe Ox, scalarul m este *abscisa* extremității M a vectorului **v**, dacă originea lui este în originea axei (Fig. 9.9).

2° Să presupunem că vectorii **v**, **a** și **b** sînt coplanari, iar vectorii **a** și **b** nu sînt coliniari. Prin descompunerea vectorului **v**, după direcțiile vectorilor **a** și **b** se înțelege găsirea a doi scalari m și n așa ca să avem $\mathbf{v}=m\mathbf{a}+n\mathbf{b}$ (Fig. 9.10). Cei doi vectori $m\mathbf{a}$ și $n\mathbf{b}$ se numesc componentele vectoriale ale vectorului **v**.

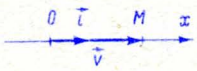


Fig. 9.9

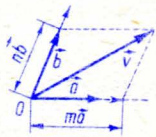


Fig. 9.10

În cazul particular cînd vectorii **a** și **b** sînt versorii **i** și **j** a două axe perpendiculare Ox și Oy, avem descompunerea unui vector după direcțiile axelor de coordonate Ox și Oy, (Fig. 9.11)

$$\mathbf{v}=X\mathbf{i}+Y\mathbf{j}.$$

Scalarii X și Y se numesc *componentele vectorului* **v** pe axele de coordonate și dacă vectorul **v** are originea în originea axelor de coordonate, ei sînt coordonatele punctului M (abscisa și ordonata lui). Se observă că $X=\mathrm{pr}_{Ox}\mathbf{v}$ și $Y=\mathrm{pr}_{Oy}\mathbf{v}$.

Din posibilitatea descompunerii precedente, rezultă importanta teoremă: **o condiție necesară și suficientă ca vectorii v, a și b să fie coplanari este ca să avem** $\mathbf{v}=m\mathbf{a}+n\mathbf{b}$.

3° Să presupunem că vectorii **a**,**b**,**c** sînt necoplanari, atunci prin descompunerea vectorului **v** după direcțiile vectorilor **a**,**b**,**c** se înțelege găsirea scalarilor m,n,p așa ca să avem $\mathbf{v}=m\mathbf{a}+n\mathbf{b}+p\mathbf{c}$. Construcția geometrică a vectorilor din partea a doua (numite componente vectoriale ale vectorului **v**) se face găsind un paralelipiped cu muchiile paralele cu vectorii **a**,**b**,**c** și avînd diagonala **v**.

În cazul particular cînd vectorii **a**,**b**,**c** sînt versorii **i**,**j**,**k** ai axelor Ox, Oy, Oz, care formează un triedru tridreptunghic (Fig. 9.12), avem descompunerea unui vector după direcțiile axelor de coordonate

$$\mathbf{v}=X\mathbf{i}+Y\mathbf{j}+Z\mathbf{k}.$$

Scalarii X,Y,Z se numesc *componentele* vectorului **v** pe axele de coordonate și dacă originea vectorului este în originea axelor de coordonate, ei sînt coordonatele punctului M (abscisa, ordonata, cota), extremitatea vectorului **v**. Avem (§ 9.2.3.2)

$$X=\mathrm{pr}_{Ox}\mathbf{v}=|\mathbf{v}|\cos\alpha,\quad Y=\mathrm{pr}_{Oy}\mathbf{v}=|\mathbf{v}|\cos\beta,$$

$$Z=\mathrm{pr}_{Oz}\mathbf{v}=|\mathbf{v}|\cos\gamma,$$

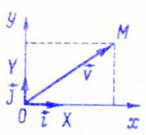


Fig. 9.11

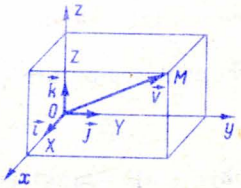


Fig. 9.12

unde lungimea vectorului este

$$|\mathbf{v}|=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2},$$

iar α, β, γ sînt unghiurile făcute de vector cu versorii axelor de coordonate. Numerele

$$\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$$

se numesc *cosinusurile directoare* ale vectorului **v** și ele determină direcția și sensul vectorului. Se vede că avem

$$\cos\alpha=\frac{X}{|\mathbf{v}|},\ \cos\beta=\frac{Y}{|\mathbf{v}|},\ \cos\gamma=\frac{Z}{|\mathbf{v}|}.$$

Observație. Dacă

$$\mathbf{v}_1=X_1\mathbf{i}+Y_1\mathbf{j}+Z_1\mathbf{k},\ \mathbf{v}_2=X_2\mathbf{i}+Y_2\mathbf{j}+Z_2\mathbf{k},$$

atunci

$$\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2=(X_1+X_2)\mathbf{i}+(Y_1+Y_2)\mathbf{j}+(Z_1+Z_2)\mathbf{k}.$$

De asemenea avem:

$$\alpha\mathbf{v}_1=\alpha X_1\mathbf{i}+\alpha Y_1\mathbf{j}+\alpha Z_1\mathbf{k}.$$

9.2.5. Produsul scalar a doi vectori

Se numește produs scalar al vectorilor **a** și **b** și se notează $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$, sau mai simplu **ab** (citește **a** înmulțit scalar cu **b**), produsul dintre lungimile celor doi vectori și cosinusul unghiului φ format de ei, deci

$$\mathbf{ab}=|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\varphi.$$

Produsul scalar este nul, dacă unul dintre vectori este nul, sau dacă vectorii sînt ortogonali, deci: O condiție necesară și suficientă pentru ortogonalitatea a doi vectori nenuli este ca produsul lor scalar să fie nul.

Produsul scalar are proprietățile:

$\mathbf{ab}=\mathbf{ba}$ comutativitate,

$\alpha(\mathbf{ab})=(\alpha\mathbf{a})\mathbf{b}=\mathbf{a}(\alpha\mathbf{b})$ asociativitate față de înmulțirea cu un scalar,

$\mathbf{a}(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{ab}+\mathbf{ac}$ distributivitatea față de adunare.

Operația de înmulțire scalară nu este însă asociativă, căci de exemplu în general $\mathbf{a}(\mathbf{bc}) \neq (\mathbf{ab})\mathbf{c}$, primul fiind un vector coliniar cu $\mathbf{a}$, iar al doilea cu $\mathbf{c}$. De aceea nu are sens puterea unui vector, afară de pătratul unui vector, care este pătratul modulului său $\mathbf{a}^2 = \mathbf{aa} = |\mathbf{a}|^2$. Nu este definită operația inversă, de împărțire, ea neavînd o soluție unică.

Dacă

$$\mathbf{v}_1 = X_1\mathbf{i} + Y_1\mathbf{j} + Z_1\mathbf{k}, \quad \mathbf{v}_2 = X_2\mathbf{i} + Y_2\mathbf{j} + Z_2\mathbf{k}$$

atunci

$$\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2.$$

De asemenea, notînd cu φ, unghiul făcut de cei doi vectori, avem

$$\cos\varphi = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}\ \sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}},$$

iar în caz de ortogonalitate a vectorilor

$$X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2 = 0.$$

9.2.6. Produsul vectorial a doi vectori

Se numește produs vectorial al vectorilor $\mathbf{a}$ și $\mathbf{b}$ și se notează $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (citește $\mathbf{a}$ înmulțit vectorial cu $\mathbf{b}$, sau pe scurt $\mathbf{a}$ ori $\mathbf{b}$), un vector așa ca

— modulul lui este egal cu $|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin\varphi$, φ fiind unghiul dintre cei doi vectori,

— este perpendicular pe planul vectorilor $\mathbf{a}$ și $\mathbf{b}$,

— sensul vectorului produs este așa ca vectorii $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ și $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ să formeze un triedru direct orientat (§ 7.4).

Produsul vectorial a doi vectori este nul dacă unul dintre vectori este nul, sau dacă vectorii sînt coliniari, deci o condiție necesară și suficientă pentru ca doi vectori nenuli să fie coliniari este ca produsul lor vectorial să fie nul.

Produsul vectorial are proprietățile:

$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ anticomutativitate,

$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ distributivitate față de adunare,

$\alpha(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\alpha\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\alpha\mathbf{b})$ asociativitate față de înmulțirea cu un scalar.

Operația nu este asociativă și nu este definită operația de împărțire.

Dacă vectorii $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ au componentele ca în paragraful precedent, avem

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}$$

și determinantul trebuie dezvoltat după prima linie.

9.2.7. Produse de trei vectori

Fiind dați vectorii $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, avem următoarele tipuri de produse:

$(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2)\mathbf{v}_3$, nu prezintă importanță (vector coliniar cu $\mathbf{v}_3$)

$(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)\mathbf{v}_3$, *produs mixt*,

$\mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3)$, *produs dublu vectorial*.

9.2.7.1. Produs mixt. Produsul mixt a trei vectori este un scalar ce se poate scrie

$$(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)\mathbf{v}_3 = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix},$$

unde pe liniile determinantului sînt în ordine componentele celor trei vectori. De aceea produsul mixt nu se schimbă nici prin permutarea circulară a vectorilor, nici prin schimbarea între ele a locurilor produselor scalar și vectorial. De aceea, cu trei vectori nu se pot obține decît două produse mixte cu valori distincte: cel de mai sus și $(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_3)\mathbf{v}_2$.

Din punct de vedere geometric valoarea absolută a produsului mixt a trei vectori este egală cu volumul paralelipipedului format pe cei trei vectori. Dacă produsul mixt este pozitiv, respectiv negativ, triedrul $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ este direct, respectiv invers orientat. Este importantă teorema: condiția necesară și suficientă ca trei vectori nenuli să fie coplanari este ca produsul lor mixt să fie nul.

9.2.7.2. Produs dublu vectorial. Produsul dublu vectorial $\mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3)$ este un vector situat în planul vectorilor $\mathbf{v}_2$ și $\mathbf{v}_3$ și el se poate scrie

$$\mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3) = \begin{vmatrix} \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_1\mathbf{v}_3 \end{vmatrix} = \mathbf{v}_2(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_3) - \mathbf{v}_3(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2).$$

Pentru produse de mai mult de trei vectori, se ține seama de rezultatele precedente.

Capitolul III
TRIGONOMETRIE

11. TRIGONOMETRIA PLANĂ

11.1. FUNCȚIILE TRIGONOMETRICE

Să presupunem că avem un sistem de două axe perpendiculare Ox și Oy (§ 9.2.4), luate astfel încît rotind cu un unghi drept pe Ox în sens contrar cu cel al acelor unui ceasornic acesta se suprapune peste Oy (fig. 11.1). Sensul acesta se ia ca sens direct de măsurare al unghiurilor cu vîrfurile în punctul O și se numește *sens direct trigonometric*. Pe cercul cu centrul în O și raza unitate (*cercul trigonometric*) considerăm un punct M, care poate fi determinat de unghiul $\alpha = \measuredangle xOM$. Fiecărui punct M de pe cerc îi corespunde un singur punct C, proiecția lui pe Ox. Aplicația care face ca punctului M să-i corespundă punctul C se numește *funcția cosinus* de α (notație $\cos\alpha$). Cum unghiul x este orice număr real, iar abscisa punctului C este din $[-1,1]$, rezultă că avem o aplicație a lui $\mathbf{R}$ în $[-1,1]$. Analog, notînd cu S proiecția punctului M pe Oy, aplicația care face ca punctului M să-i corespundă punctul S se numește *funcția sinus* de α (notație $\sin\alpha$). Ea este, ca mai sus, o aplicație a lui $\mathbf{R}$ în $[-1,1]$. Cum $OM=1$, avem *relația fundamentală*

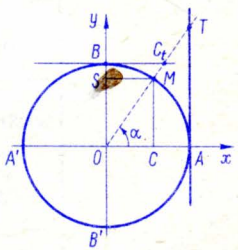


Fig. 11.1

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1. \tag{1}$$

Cîturile lor se numesc *tangenta* și *cotangenta* unghiului, (notații $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$) și avem

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\quad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \tag{2}$$

Inversele sinusului și cosinusului se numesc *cosecanta* și *secanta* unghiului α, notație cosec α, sec α și avem

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}, \quad \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}. \tag{3}$$

Cele șase funcții de unghiul α se numesc *funcții trigonometrice*. Funcțiile sinus și cosinus sînt continue și periodice de perioadă 2π. Funcția tangentă este discontinuă pentru $\alpha = \frac{2k+1}{2}\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, iar funcția cotangentă este discontinuă pentru $\alpha = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Pentru alte valori ale lui α ele sînt continue. Ambele funcții sînt periodice și de perioadă π. Semnele pe care le au cele patru funcții trigonometrice în cele patru cadrane în care este împărțit planul de cele două axe de coordonate sînt date în tabelul de mai jos.

	Cadranul			
	I	II	III	IV
sinus	+	+	−	−
cosinus	+	−	−	+
tangentă	+	−	+	−
cotangentă	+	−	+	−

Observații. 1°. Pentru orice unghi α, valorile funcțiilor trigonometrice sînt numere reale, ele fiind măsura unor segmente. În adevăr, notînd cu C și S proiecțiile punctului M pe cele două axe de coordonate (Fig. 11.1), avem $\sin \alpha = [OS]$ și $\cos \alpha = [OC]$. Tangentele la cerc în punctele A și B unde cercul trigonometric taie axele de coordonate (Fig. 11.1) intersectează semidreapta OM în punctele T și C_t. Segmentele AT și BC_t sînt la fel orientate ca și axele de coordonate și avem

$$\operatorname{tg} \alpha = [AT], \quad \operatorname{ctg} \alpha = [BC_t].$$

2°. Pentru unghiuri α ascuțite, funcțiile trigonometrice se pot defini ca rapoarte de lungimi de laturi dintr-un triunghi dreptunghic cu un unghi α (fig. 11.2). Astfel avem

$$\sin\alpha=\frac{AC}{BC},\quad \cos\alpha=\frac{AB}{BC}.$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{AC}{AB},\quad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{AB}{AC}.$$

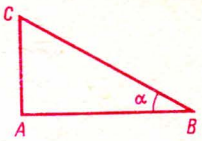


Fig. 11.2

3°. Funcția sinus este o funcție impară, iar funcția cosinus este funcție pară, deci pentru orice α, avem

(4) $$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha,\ \cos(-\alpha)=\cos\alpha.$$

4°. Două unghiuri se numesc *complementare*, dacă suma lor este de 90°. În acest caz sinusul unuia este egal cu cosinusul celuilalt, iar tangenta unuia este egală cu cotangenta celuilalt, deci dacă $\hat{A}+\hat{B}=90°$, avem

(5) $$\sin\hat{A}=\cos\hat{B}\ \text{și}\ \operatorname{tg}\hat{A}=\operatorname{ctg}\hat{B},$$

sau

$$\sin(90°-\hat{B})=\cos\hat{B},\ \operatorname{tg}(90°-\hat{B})=\operatorname{ctg}\hat{B}.$$

5°. Două unghiuri se numesc *suplimentare*, dacă suma lor este de 180°. În acest caz sinusurile lor sînt egale, iar cosinusurile, tangentele și cotangentele lor sînt opuse, deci dacă $\hat{A}+\hat{B}=180°$, avem

$$\sin\hat{A}=\sin\hat{B},\ \cos\hat{A}=-\cos\hat{B},\ \operatorname{tg}\hat{A}=-\operatorname{tg}\hat{B},\ \operatorname{ctg}\hat{A}=-\operatorname{ctg}\hat{B},$$

sau

(6) $$\sin(180°-\hat{B})=\sin\hat{B},\ \cos(180°-\hat{B})=-\cos\hat{B}$$

$$\operatorname{tg}(180°-\hat{B})=-\operatorname{tg}\hat{B},\ \operatorname{ctg}(180°-\hat{B})=-\operatorname{ctg}\hat{B}.$$

6°. Pentru unghiurile de 0°, 30°, 45°, 60°, 90° funcțiile trigonometrice au valorile din tabelul alăturat. Mai general se poate observa că dacă α este unghiul la centru al unui poligon regulat cu n laturi (§ 3.3) înscris într-un cerc cu raza unitate, atunci

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{l_n}{2},\ \cos\frac{\alpha}{2}=a_n,$$

unde l_n și a_n sînt latura și respectiv apotema poligonului regulat. Astfel pentru $n=5, 8, 10$ și 12, obținem funcțiile trigonometrice ale unghiurilor de 36°; 22°,5; 18° și 15° date mai jos.

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞
$\operatorname{ctg}\alpha$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

$$\sin\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}, \qquad \cos\frac{\pi}{5}=\frac{1+\sqrt{5}}{4},$$

$$\sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, \qquad \cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},$$

$$\sin\frac{\pi}{10}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}, \qquad \cos\frac{\pi}{10}=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},$$

$$\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \qquad \cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

7°. Funcțiile trigonometrice sînt funcții transcendente, deci valorile lor nu sînt în general numere raționale. Pentru aplicații avem la dispoziție *tabele* ale acestor valori; de fapt cel mai des utilizate sînt cele ale logaritmilor zecimali pentru aceste valori și ele se găsesc în tabelele de logaritmi. Astfel în tabelele de logaritmi cu 5 zecimale avem

funcțiile trigonometrice din minut în minut (pentru grade sexagesimale). Pentru secunde se face o interpolare liniară, deci se presupune că pe un interval de un grad, funcțiile variază liniar. Din cauza proprietăților unghiurilor complementare, tabelele se calculează numai pînă la 45°. Există și tabele în care unitatea pentru unghi este gradul centesimal.

8°. Pentru a putea utiliza tabelele de valori ale funcțiilor trigonometrice, cum unghiurile pot avea orice valoare pozitivă sau negativă, deci nu sînt obligatoriu cuprinse între 0° și 360°, deci cu atît mai mult nu sînt cuprinse între 0° și 90°, se face întîi așa-numita *reducere la primul cadran* prin care se exprimă funcțiile trigonometrice ale unui unghi oarecare cu ajutorul funcțiilor trigonometrice ale unghiurilor din primul cadran (cuprinse între 0° și 90°). Astfel

— pentru unghiurile negative se utilizează proprietățile de paritate sau imparitate (4);

— pentru unghiurile mai mari decît 360° se utilizează proprietatea de periodicitate;

— pentru unghiurile din cadranul doi se utilizează proprietățile (6) corespunzătoare unghiurilor suplimentare;

— pentru unghiurile din cadranul trei avem

$$\sin \hat{A} = -\sin(\hat{A}-180°),\ \cos \hat{A} = -\cos(\hat{A}-180°)$$

$$\operatorname{tg} \hat{A} = \operatorname{tg}(\hat{A}-180°),\ \operatorname{ctg} \hat{A} = \operatorname{ctg}(\hat{A}-180°);$$

— pentru unghiurile din cadranul patru avem

$$\sin \hat{A} = -\sin(\hat{A}-270°),\ \cos \hat{A} = \cos(\hat{A}-270°)$$

$$\operatorname{tg} \hat{A} = -\operatorname{tg}(\hat{A}-270°),\ \operatorname{ctg} \hat{A} = -\operatorname{ctg}(\hat{A}-270°).$$

9°. Ținînd seama de formulele (1), (2) și (3), fiecare dintre cele șase funcții trigonometrice se poate exprima cu ajutorul uneia dintre ele. Așa de exemplu avem

$$\cos \alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha},\quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin \alpha},\ \sec \alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}},\ \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}.$$

În adevăr, fiind dat $\sin \alpha$, putem avea două unghiuri cuprinse între 0° și 360° și anume unul în primul cadran și altul în al doilea cadran.

11.2. FUNCȚIILE TRIGONOMETRICE INVERSE

Teoremele de mai jos arată în ce condiții, dîndu-se una dintre funcțiile trigonometrice, se poate determina unghiul.

Oricare ar fi numărul real $m \in [-1, 1]$, ecuația

$$\sin x = m$$

are soluțiile

$$x = (-1)^k \alpha + k\pi, \qquad k \in \mathbf{Z},$$

unde $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (Fig. 11.3, *a*). Funcția inversă a funcției

$$y = \sin x,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ este } x = \arcsin y$$

(citește arcul al cărui sinus este y) (Condiția impusă pentru x asigură monotonia funcției directe). Avem $\sin(\arcsin y) = y$.

Oricare ar fi numărul real $m \in [-1,1]$ ecuația

$$\cos x = m$$

are soluțiile

$$x = \pm\alpha + 2k\pi, \qquad k \in \mathbf{Z},$$

unde $\alpha \in [0,\pi]$ (Fig. 11.3, *b*). Funcția inversă a funcției $y = \cos x$, $x \in [0,\pi]$ este $x = \arccos y$ (citește arcul al cărui cosinus este y). Avem $\cos(\arccos y) = y$.

Oricare ar fi numărul real m, ecuația

$$\operatorname{tg} x = m$$

are soluțiile

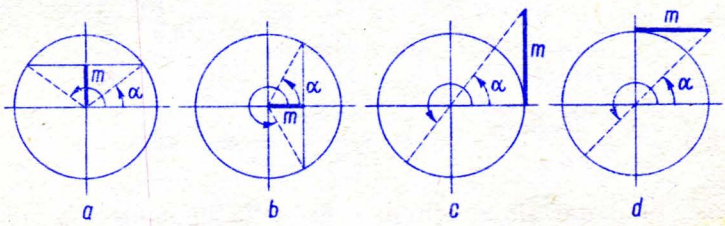


Fig. 11.3

$$x=\alpha+k\pi, \qquad k\in\mathbf{Z}$$

unde $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (fig. 11.3, c). Funcția inversă a funcției $y=\operatorname{tg} x$ $x\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ este $x=\operatorname{arc\,tg}\, y$ (citește arcul a cărui tangentă este y). Avem $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}\, y)=y$.

Oricare ar fi numărul real m, ecuația

$$\operatorname{ctg} x=m$$

are soluțiile

$$x=\alpha+k\pi, \qquad k\in\mathbf{Z},$$

unde $\alpha\in(0,\pi)$ (Fig. 11.3.d). Funcția inversă a funcției $y=\operatorname{ctg} x$, $x\in(0,\pi)$ este $x=\operatorname{arc\,ctg}\, y$ (citește arcul a cărui cotangentă este y). Avem $\operatorname{ctg}(\operatorname{arc\,ctg}\, y)=y$.

În tabelul de mai jos sînt date rezultatele aplicării succesive a unei funcții inverse și apoi a unei funcții directe trigonometrice

$\sin(\operatorname{arc\,sin} x)=x$, $\qquad \cos(\operatorname{arc\,sin} x)=\sqrt{1-x^2}$,

$\sin(\operatorname{arc\,cos} x)=\sqrt{1-x^2}$, $\qquad \cos(\operatorname{arc\,cos} x)=x$,

$\sin(\operatorname{arc\,tg} x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ $\qquad \cos(\operatorname{arc\,tg} x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$,

$\sin(\operatorname{arc\,ctg} x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $\qquad \cos(\operatorname{arc\,ctg} x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

$\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,sin} x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $\qquad \operatorname{ctg}(\operatorname{arc\,sin} x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

$\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,cos} x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, $\qquad \operatorname{ctg}(\operatorname{arc\,cos} x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x)=x$, $\qquad \operatorname{ctg}(\operatorname{arc\,tg} x)=\frac{1}{x}$,

$\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,ctg} x)=\frac{1}{x}$, $\qquad \operatorname{ctg}(\operatorname{arc\,ctg} x)=x$.

Pentru alte operații cu funcțiile inverse, a se vedea paragrafele următoare.

11.3. FORMULE DE ADUNARE ȘI CONSECINȚE

Se zice că o funcție $f(x)$ admite o teoremă de adunare dacă oricare ar fi x și y dintr-un anumit interval, avem

$$f(x+y)=F[f(x),\ f(y)],$$

unde F este o funcție dată. Astfel, de exemplu, pentru funcțiile cx și e^x avem teoremele de adunare

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \text{ și } f(x+y)=f(x)f(y).$$

Pentru funcțiile trigonometrice avem, oricare ar fi $x,\ y\in\mathbf{R}$:

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$$

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$$

$$\operatorname{tg}(x+y)=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y},$$

$$\operatorname{ctg}(x+y)=\frac{\operatorname{ctg}x\operatorname{ctg}y-1}{\operatorname{ctg}x+\operatorname{ctg}y}$$

sau înlocuind pe y cu $-y$

$$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y$$

$$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$$

$$\operatorname{tg}(x-y)=\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y}{1+\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}$$

$$\operatorname{ctg}(x-y)=\frac{\operatorname{ctg}x\operatorname{ctg}y+1}{\operatorname{ctg}y-\operatorname{ctg}x}.$$

Aplicație. Aplicînd formulele precedente pentru funcțiile inverse, avem

$$\sin(\arcsin x+\arcsin y)=x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}$$

$$\cos(\arccos x+\arccos y)=xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$$

$$\sin(\arccos x+\arcsin y)=\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}+xy$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x+\operatorname{arc\,tg} y)=\frac{x+y}{1-xy}$$

$$\operatorname{tg}(\arcsin x+\arcsin y)=\frac{x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}-xy}.$$

Pentru funcțiile trigonometrice ale unei sume de două sau trei unghiuri avem

$$\sin(x+y)=\cos x\cos y(\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y)$$

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y(1-\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y)$$

$$\sin(x+y+z)=\cos x\cos y\cos z(\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y+\operatorname{tg} z-\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y\operatorname{tg} z)$$

$$\cos(x+y+z)=\cos x\cos y\cos z(1-\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y-\operatorname{tg} y\operatorname{tg} z-\operatorname{tg} z\operatorname{tg} x)$$

și generalizarea pentru sume de mai mult de trei unghiuri este imediată. Din formulele de mai sus avem

$$\operatorname{tg}(x+y+z)=\frac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y+\operatorname{tg} z-\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y\operatorname{tg} z}{1-\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y-\operatorname{tg} y\operatorname{tg} z-\operatorname{tg} z\operatorname{tg} x}.$$

Din primele formule de mai sus deducem ușor relațiile

$$\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\varphi,\ \cos\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\varphi$$

$$\operatorname{tg}\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)=-\operatorname{ctg}\varphi,\ \operatorname{ctg}\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)=-\operatorname{tg}\varphi$$

$$\sin(\varphi+\pi)=-\sin\varphi,\ \cos(\varphi+\pi)=-\cos\varphi$$

$$\operatorname{tg}(\varphi+\pi)=\operatorname{tg}\varphi,\ \operatorname{ctg}(\varphi+\pi)=\operatorname{tg}\varphi,$$

formule care se pot obține și direct.

11.3.1. Funcțiile trigonometrice ale multiplilor unui unghi

Din formula lui Moivre (Algebră. III.2.2) avem

$$\cos n\alpha = \cos^n \alpha - C_n^2 \cos^{n-2}\alpha \sin^2\alpha + C_n^4 \cos^{n-4}\alpha \sin^4\alpha - \ldots,$$

ultimul termen fiind

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} n \cos\alpha \sin^{n-1}\alpha \text{ sau } (-1)^{\frac{n}{2}} \sin^n\alpha$$

după cum n este impar sau par. De asemenea

$$\sin n\alpha = C_n^1 \sin\alpha \cos^{n-1}\alpha - C_n^3 \sin^3\alpha \cos^{n-3}\alpha + \ldots,$$

ultimul termen fiind

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} \sin^n\alpha \text{ sau } (-1)^{\frac{n-2}{2}} n \sin^{n-1}\alpha \cos\alpha$$

după cum n este impar sau par.

În particular avem

$$\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$\sin 3\alpha = 3 \sin\alpha - 4 \sin^3\alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3\alpha - 3 \cos\alpha$$

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2\alpha}$$

Aplicație. Pentru funcțiile inverse avem

$$\sin(2 \arcsin x) = 2x\sqrt{1-x^2}$$

$$\cos(2 \arccos x) = 2x^2 - 1$$

$$\operatorname{tg}(2 \operatorname{arc\,tg} x)=\frac{2x}{1-x^2}.$$

Mai general avem

$$\cos(n \operatorname{arc\,cos} x)=x^n-C_n^2(1-x^2)x^{n-2}+C_n^4(1-x^2)^2x^{n-4}+\ldots$$

care se numesc polinoamele lui Cebîșev,

$$\sin(n \operatorname{arc\,sin} x)=C_n^1(1-x^2)^{\frac{n-1}{2}}x-C_n^3(1-x^2)^{\frac{n-3}{2}}x^3+\ldots$$

$$\operatorname{tg}(n \operatorname{arctg} x)=\frac{C_n^1x-C_n^3x^3+\ldots}{1-C_n^2x^2+C_n^4x^4-\ldots}$$

11.3.2. Funcțiile trigonometrice ale jumătății unghiului

Avem

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}.$$

Sînt importante pentru aplicații formulele în care funcțiile trigonometrice ale unghiului α se exprimă cu ajutorul tangentei arcului pe jumătate. Notînd

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=t,$$

avem

$$\sin\alpha=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos\alpha=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{2t}{1-t^2}.$$

Aplicație. Pentru funcțiile inverse avem

$$\sin(2 \operatorname{arc\,tg} x)=\frac{2x}{1+x^2}$$

$$\cos(2 \operatorname{arc\,tg} x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

$$\cos\left(\frac{1}{2} \operatorname{arc\,cos} x\right) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$$

$$\sin\left(\frac{1}{2} \operatorname{arc\,sin} x\right) = \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{1}{2} \operatorname{arc\,sin} x\right) = \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{2}.$$

11.3.3. Transformarea sumelor de funcții trigonometrice în produse (formule calculabile prin logaritmi)

Avem

$$\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha-\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha-\cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},$$

$$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

și reciproc

$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta),$$
$$2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta),$$
$$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta).$$

11.4. EGALITĂȚI TRIGONOMETRICE

O egalitate trigonometrică este o egalitate între două expresii formate cu funcțiile trigonometrice ale unui unghi variabil. Egalitatea este o identitate dacă ea este adevărată pentru orice valori ale unghiului variabil și ecuație în cazul cînd ea are loc numai pentru anumite valori, numite *soluțiile ecuației*. Găsirea soluțiilor unei ecuații se face căutînd să se ajungă la o ecuație în care să intervină o singură functie trigonometrică a unghiului necunoscut. Dacă această ecuație este algebrică și dacă i se pot afla rădăcinile, problema se reduce la a rezolva una dintre ecuațiile $\sin x=m$, $\cos x=m$, $\operatorname{tg} x=m$, $\operatorname{ctg} x=m$ (§11.2).

Pentru obținerea ecuației cu o singură necunoscută se utilizează diversele formule din paragrafele precedente, căutînd ca ecuația obținută să fie cît mai simplă și pe cît posibil să nu conțină radicali. În acest scop cel mai des se exprimă funcțiile trigonometrice ale unui unghi cu ajutorul tangentei unghiului pe jumătate. În cazul cînd ecuația este rațională și conține numai funcțiile $\sin x$ și $\cos x$, prima dintre ele fiind numai la puteri pare, se face substituția $\cos x=t$ (sau $\sin x=t$, dacă funcția $\cos x$ este la puteri pare). În cazul cînd ecuația este rațională și omogenă în $\sin x$, $\cos x$, se face substituția $\operatorname{tg} x=t$.

Dacă ecuația dată se poate aduce la una din formele $\sin f=\sin g$, $\cos f=\cos g$, $\operatorname{tg} f=\operatorname{tg} g$, între argumente avem respectiv relațiile

$$f=(-1)^k g+k\pi,\quad f=\pm g+2k\pi,\quad f=g+k\pi$$

unde $k\in\mathbf{Z}$.

Mai reamintim cazul foarte des întîlnit în aplicații al ecuației

$$a\sin x+b\cos x=c,$$

unde a, b și c sînt constante reale, pentru care cel mai des se notează

$$a=r\cos\varphi \qquad r=\sqrt{a^2+b^2}$$

deci

$$b=r\sin\varphi \qquad \operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a}$$

cu care obținem

$$r\sin(x+\varphi)=c$$

și soluțiile se găsesc ușor. Nu avem soluții decît dacă

$$\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|\leqslant 1.$$

11.5. INECUAȚII TRIGONOMETRICE

Presupunînd că inecuația este

$$f>0,$$

unde funcția f depinde de o singură funcție trigonometrică, semnul funcției f, pentru diferite valori ale unghiului necunoscut se poate determina numai după ce aceasta a fost descompusă în factori al căror semn să se poată determina. Acești factori trebuie să fie, în special, de forma $\sin x-a$, $\cos x-a$, $\operatorname{tg} x-a$, $\operatorname{ctg} x-a$.

11.6. RELAȚII TRIGONOMETRICE ÎNTR-UN TRIUNGHI

Peste tot vom nota cu A, B, C unghiurile triunghiului și cu a, b, c laturile lui, acestea fiind în ordine opuse unghiurilor A, B, C (Fig. 11.4). Cele mai importante formule și teoreme sînt date mai jos.

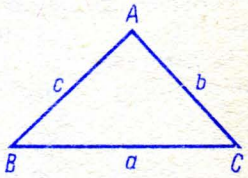


Fig. 11-4

Teorema sinusurilor

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R,$$

unde R este raza cercului circumscris triunghiului.

Teorema proiecțiilor

$$a=b\cos C+c\cos B$$

$$b=c\cos A+a\cos C$$

$$c=a\cos B+b\cos A.$$

Teorema cosinusului (Pitagora generalizată)

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

Teorema tangentelor. Pentru orice două laturi ale unui triunghi avem

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}},$$

sau două formule mai generale

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}, \qquad \frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}.$$

Funcțiile trigonometrice ale jumătății unghiurilor. Notînd cu $2p=a+b+c$, perimetrul triunghiului, avem

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},$$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}.$$

Formule pentru elementele unui triunghi:

Perimetru

$$2p=8R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

Aria

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C, \quad S=\frac{a^2\sin B\sin C}{\sin A}$$

$$S=\sqrt{p(p-a)\,(p-b)\,(p-c)} \qquad \text{(Heron).}$$

$$S=2R^2 \sin A \sin B \sin C.$$

Înălțimea h_a ce pornește din vîrful A

$$h_a=c \sin B=2R \sin B \sin C.$$

Bisectoarea b_a a unghiului A

$$b_a=\frac{c \sin B}{\cos \frac{B-C}{2}}.$$

Mediana m_a ce pornește din vîrful A

$$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2 \sin^2 B+2 \sin^2 C-\sin^2 A}.$$

Raza r a cercului înscris

$$r=4R \sin\frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

Cîteva *identități pentru unghiurile unui triunghi*

$\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C=\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C$ (triunghi obtuzunghi)

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2}+\operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2}+\operatorname{tg} \frac{C}{2} \operatorname{tg} \frac{A}{2}=1,$$

$$\sin A+\sin B+\sin C=4 \cos\frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2},$$

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2},$$

$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4 \sin A \sin B \sin C,$$

$$\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=-1-4 \cos A \cos B \cos C,$$

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2(1+\cos A \cos B \cos C),$$

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1-2\cos A\cos B\cos C,$$

$$\sin A\cos B\cos C+\sin B\cos A\cos C+\sin C\cos A\cos B=$$

$$=\sin A\sin B\sin C$$

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=$$

$$=\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

11.7 RELAȚII TRIGONOMETRICE ÎNTR-UN PATRULATER

Fie patrulaterul $ABCD$ (Fig. 3.25) în care notăm $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$, perimetrul $2p=a+b+c+d$ și diagonalele $x=AC$, $y=BD$.

Aria S a patrulaterului (convex sau concav) este

$$S=\frac{xy\sin\alpha}{2},$$

unde α este unul dintre unghiurile făcute de diagonale. Avem de asemenea

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-abcd\cos^2\frac{B+D}{2}},$$

formulă asemănătoare cu cea a lui *Heron*.

În cazul *patrulaterelor inscriptibile*, formula precedentă devine

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

Tot pentru patrulatere inscriptibile, avem

— *unghiurile în funcție de laturi*

$$\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}=\operatorname{ctg}^2\frac{C}{2}=\frac{(p-a)(p-d)}{(p-b)(p-c)}\quad\text{și}\quad\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}=\operatorname{ctg}^2\frac{D}{2}=\frac{(p-a)(p-b)}{(p-c)(p-d)},$$

— *raza* R *a cercului circumscris patrulaterului*

$$4R = \sqrt{\frac{(ab+cd)(bc+ad)(ac+bd)}{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}},$$

sau introducînd diagonalele (§ 3.2.1) și aria S, avem

$$4RS = (ab+cd)x = (bc+ad)y.$$

Anexă

AXIOMELE GEOMETRIEI

Elementele lui Euclid [1] sînt formate din 13 cărți (capitole), dintre care 8 sînt de geometrie pură, iar 5 tratează geometric problemele fundamentale din teoria proporțiilor și din aritmetică. Fiecare carte începe cu definirea noțiunilor utilizate. Astfel cartea I-a începe cu 23 de definiții care se referă la punct, dreaptă, plan, unghiul a două drepte, cercul, poligoane etc. Dăm cîteva dintre ele (conform traducerii prof. V. Marian).

1. Punctul este ceea ce nu are nici o parte.
2. Linia (curba) este o lungime fără lățime.
3. Extremitățile unei linii sînt puncte.
4. Dreapta este linia situată la fel față de toate punctele ei.
5. Suprafața este ceea ce are numai lungime și lățime.
6. Extremitățile unei suprafețe sînt linii.
7. Planul este suprafața situată la fel față de toate dreptele conținute în el.
8. Unghiul plan este înclinația reciprocă a două linii concurente situate într-un plan.

... ...

11. Unghiul obtuz este acela care e mai mare decît unghiul drept.

... ...

20. Dintre figurile trilatere, triunghiul echilateral este acela care are trei laturi egale; isoscel, acela care are numai două laturi egale, scalen, acela care are cele trei laturi neegale.

... ...

23. Paralelele sînt drepte, care, fiind situate în același plan și fiind prelungite în mod indefinit de ambele părți, nu se întîlnesc în nici o parte.

Este clar că definițiile punctului, curbei suprafeței și altele nu sînt satisfăcătoare.

Urmează apoi cinci postulate:

1. Două puncte determină o dreaptă.
2. Orice dreaptă poate fi prelungită indefinit.

---

[1] Traducerea în limba română s-a făcut de prof. V. Marian în 1939.

3. Din orice centru se poate duce un cerc cu orice rază vrem.
4. Toate unghiurile drepte sînt egale între ele.
5. Cînd o secantă taie alte două drepte și formează cu ele unghiuri interne și așezate de aceeași parte a secantei a căror sumă este mai mică decît două unghiuri drepte, dreptele se vor intersecta de acea parte a secantei unde această sumă este mai mică decît două unghiuri drepte.

Urmează 5—9 axiome (după diferite ediții, unele postulate fiind trecute ca axiome, motiv pentru care deseori nu se mai face distincție între axiome și postulate, prin ele înțelegîndu-se adevăruri admise fără demonstrații). Axiomele se referă la cantități a căror natură nu se specifică (ex. lungimi, arii, volume etc). Primele axiome sînt:

1. Două cantități egale cu a treia sînt egale.
2. Dacă la cantități egale se adaugă cantități egale, se obțin cantități egale.
3. Dacă din cantități egale se scad cantități egale, se obțin cantități egale.
4. Mărimile care coincid sînt egale.
5. Întregul este mai mare decît partea.

... ...

Pornind de la definițiile, postulatele și axiomele date, Euclid demonstrează toate rezultatele fundamentale corespunzătoare subiectului cărții. Forma axiomatică de expunere, claritatea și concizia materialului prezentat au făcut ca „Elementele" lui Euclid să fie considerate ca un model de perfecțiune și un manual ideal de studiu al geometriei.

Primele nedumeriri au fost pricinuite de postulatul al cincilea, al cărui enunț este analog cu al unei teoreme, dat însă fără demonstrație. Așa a început un lung șir de tentative de a demonstra acest postulat cu ajutorul celorlalte postulate și axiome, aceasta cu atît mai mult cu cît el este echivalent cu afirmația că printr-un punct exterior unei drepte se poate duce o singură paralelă la dreaptă, deci el este la baza întregii teorii a paralelelor și prin urmare a asemănării. Aceste tentative au condus în secolul al 19-lea la crearea unei *geometrii neeuclidiene* (prin opoziție cu geometria euclidiană, deci a lui Euclid) de către *Gauss*, *Lobacevski* și *Bolyai*, în care axioma a V-a a paralelelor a fost înlocuită cu axioma: într-un plan, printr-un punct exterior unei drepte se pot duce o infinitate de drepte distincte, care nu întîlnesc dreapta dată. Apoi cînd *Beltrami* a dat un model al geometriei noi, a fost demonstrată necontradicția acestei geometrii și cu aceasta independența axiomei a V-a de restul postulatelor. Trebuie amintit că în același timp *Riemann* a creat o altă geometrie neeuclidiană și a dat o amplă extindere conceptului de spațiu.

Studiile aprofundate făcute în decursul timpului au avut ca rezultat pe de o parte scoaterea la iveală a unor deficiențe serioase ale sistemului lui Euclid, iar pe de altă parte s-a reușit să se stabilească ce condiții trebuie să îndeplinească un sistem de axiome pentru orice ramură matematică și să se construiască un asemenea sistem pentru geometrie.

Astfel Euclid introduce noțiunea de egalitate a figurilor cu ajutorul noțiunii de mișcare, pe care nu o definește. Dă definiții pe care nu le folosește în continuare, ca de exemplu, punctul este ceea ce nu are părți, sau curba este o lungime care nu are lățime. Utilizează în cursul demonstrațiilor, în mod tacit, unele propoziții care n-au fost date nici ca axiome, nici demonstrate ca teoreme și pe care le lasă uneori să se „înțeleagă" din considerarea unei figuri. Noțiunea de ordine a așezării elementelor lipsește din „Elemente" ș.a.m.d.

În ce privește *sistemul de axiome* pentru o anumită ramură, acesta este o mulțime de propoziții numite axiome care sînt admise ca puncte de plecare fără demonstrație. În enunțarea axiomelor intervin diferite elemente sau relații primare, pe care nu le definim explicit. Toate celelalte proprietăți se enunță sub formă de teoreme, care se demonstrează cu ajutorul axiomelor și a regulilor logicii.

Axiomele unui sistem trebuie să fie în *număr minim*, să fie *necontradictorii* (deci rezultatele obținute pornind de la grupuri distincte de axiome, să nu se contrazică) și să formeze un *sistem complet*, deci orice teoremă din ramura respectivă trebuie să se poată demonstra numai cu axiomele sistemului, la care nu mai trebuie nimic de adăugat.

Primul care a reușit să dea pentru geometrie un sistem axiomatic, care să corespundă cerințelor precedente a fost *David Hilbert* (1862—1943) în cartea sa „Bazele geometriei" (1899). În cursul dezvoltării teoriei nu se mai face uz de intuiție, căci tot ceea ce a fost necesar din aceasta, a fost incorporat în ea de la început în axiome. Hilbert introduce trei feluri de elemente primare: *punctele*, pe care le notează A, B, C, ..., *dreptele* pe care le notează cu a, b, c, ..., *planele* pe care le notează cu α, β, γ, ... Denumirile acestor elemente primare, au înțelesul obișnuit numai în geometria euclidiană, altfel ele reprezintă elemente nedefinite, despre care nu se afirmă altceva decît că satisfac axiomele și consecințele lor logice. Același lucru pentru *relațiile primare* care sînt „*a aparține*", „*între*" „*a fi congruent*". Trebuie însă remarcat că elementele și relațiile primare au fost alese cu gîndul la geometria euclidiană.

Sistemul axiomatic al lui Hilbert este compus din 20 de axiome, împărțite în 5 grupe, primele corespunzătoare celor 3 relații primare Acestea sînt

Axiomele de legătură

I_1. Prin două puncte trece totdeauna o dreaptă.

I_2. Prin două puncte distincte trece o singură dreaptă.

I_3. Orice dreaptă conține cel puțin două puncte. Există trei puncte nesituate pe aceeași dreaptă.

I_4. Prin trei puncte nesituate pe aceeași dreaptă trece un plan. Orice plan conține cel puțin un punct.

I_5. Prin trei puncte nesituate pe aceeași dreaptă trece un singur plan.

I_6. Dacă o dreaptă are două puncte situate într-un plan, atunci toate punctele aparțin planului.

I_7. Dacă două plane trec printr-un punct, atunci ele mai trec printr-un al doilea punct.

I_8. Există patru puncte nesituate în același plan.

Observație. Axiomele precedente pot fi enunțate cu ajutorul relației fundamentale „a aparține" care poate fi înlocuită cu „a conține", „a trece", „a exista" etc.

Să dăm ca exemplu, demonstrarea teoremei: două plane, ori n-au nici un punct comun, ori au o dreaptă comună pe care sînt situate toate punctele comune planelor.

Fie două plane α, β care au un punct comun A. Ele au atunci încă un punct comun $B(I_7)$. Există apoi o dreaptă care unește punctele A și B (I_1, I_2) și fiecare punct al ei aparține planelor α, β (I_6). Pentru a arăta că dreapta AB conține toate punctele comune planelor, presupunem prin absurd că punctul C comun planelor nu ar fi pe dreapta AB. Dar atunci planele ar fi confundate (I_5).

Axiomele de ordonare

II_1. Dacă punctul B se găsește între punctele A, C, atunci punctele A,B,C sînt pe aceeași dreaptă, sînt distincte și B se găsește între C și A.

II_2. Fiind date două puncte distincte A,B există un punct C, astfel încît B să se găsească între A și C.

II_3. Fiind date trei puncte coliniare distincte A,B,C, dacă A se află între B,C, atunci C nu se află între A,B și nici B nu se află între A, C.

II_4. (Axioma lui *Pash*). Fiind date trei puncte A,B,C nesituate pe aceeași dreaptă și o dreaptă d din planul lor, dar care nu trece prin nici unul dintre aceste puncte, atunci dacă dreapta d trece printr-un punct situat între A,B, atunci ea trece cu siguranță printr-un punct

situat între A și C sau printr-un punct situat între B,C.

Cu ajutorul celor două grupe de axiome, putem să demonstrăm teoreme importante, ca de exemplu:

— un punct al unei drepte, împarte toate punctele drepte în două clase, deci împarte dreapta în două semidrepte,

— o dreaptă dintr-un plan împarte punctele acestui plan în două clase,

— un plan separă punctele spațiului în două clase,

— un poligon separă mulțimea punctelor planului lui, nesituate pe laturi, în două clase: interiorul și exteriorul lui.

Axiomele de congruență

III_1. Fiind dat un segment AB, o dreaptă d și un punct O pe dreapta d, există pe dreapta d exact două puncte P_1, P_2 astfel încît să avem $OP_1 = AB$, $OP_2 = AB$. Punctul O se găsește între punctele P_1, P_2.

III_2. Două segmente congruente cu al treilea sînt congruente între ele.

III_3. Dacă B este între A,C, dacă B' este între A',C' și dacă sînt verificate congruențele $AB \equiv A'B'$, $BC \equiv B'C'$, atunci este adevărată și congruența $AC \equiv A'C'$.

III_4. Fiind dat un unghi (h,k) și o semidreaptă h' într-un plan α, există în planul α exact două semidrepte k_1, k_2, care să formeze cu h' unghiuri congruente cu unghiul (h,k). Semidreptele k_1, k_2 sînt de o parte și de alta a dreptei ce conține semidreapta h'. Orice unghi este congruent cu el însuși.

III_5. Fiind date două triunghiuri ABC, $A'B'C'$, din congruențele $A \equiv A'$, $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$, rezultă $B \equiv B'$.

Din axiomele expuse rezultă un mare număr de teoreme comune geometriilor lui Euclid și Lobacevski, ca de exemplu teorema unghiului exterior, teoremele de congruență ale triunghiurilor etc.

Axioma de paralelism

IV_1. Printr-un punct exterior unei drepte nu se poate duce mai mult de o paralelă la acea dreaptă.

Axiomele de continuitate

V_1. *Axioma lui Arhimede.* Fie AB și CD două segmente oarecare. Atunci pe dreapta AB există un număr finit de puncte $A_1, A_2, \ldots, A_n$ așezate astfel încît punctul A_1 să se găsească între A și A_2, punctul

A_2 să se afle între A_1 și A_3 etc., iar segmentele AA_1, A_1A_2, ..., $A_{n-1}A_n$ să fie egale cu segmentul CD și B să se găsească între A și A_n.

V_2. *Axioma lui Cantor*. Pe o dreaptă oarecare a, fie un șir infinit de segmente A_1B_1, A_2B_2, ... așa ca fiecare segment să fie cuprins în interiorul segmentului precedent. Presupunem că nu există nici un segment care să fie situat în interiorul tuturor segmentelor acestui șir. Atunci pe dreapta a există un punct X și unul singur, care este cuprins în interiorul segmentelor A_1B_1, A_2B_2 etc.

Geometria obținută pe baza acestor axiome este o geometrie abstractă. Geometria clasică este un model al sistemului axiomatic considerat, dar nu este singurul. Putem lua ca model geometria descriptivă sau geometria analitică. Dar aceste modele nu sînt esențial distincte, întrucît există o corespondență bijectivă între elementele lor, cu păstrarea tuturor relațiilor.

Trebuie să observăm că putem forma diferite geometrii consistente numai cu o parte din axiome. Aici însă apar modele esențial diferite. Sistemul de axiome al lui Hilbert poate fi înlocuit cu alte sisteme de axiome echivalente. Se poate lua, de exemplu, printre noțiunile primare mișcarea în locul congruenței, ceea ce scoate în evidență o serie de proprietăți, care rămîn mai ascunse în tratarea lui Hilbert. Mai nou, se preferă o axiomatizare pe cale algebrică, punînd la baza teoriei, proprietățile vectoriale ale spațiului.

Menționăm apariția unor cărți de geometrie, complet axiomatizate (manualele $Alef_0$), destinate elevilor. Însă utilizarea lor prezintă încă multe dificultăți.

BIBLIOGRAFIE

N. Mihăileanu, Bazele geometriei. În volumul Probleme actuale de Matematică. Ed. did. și ped. București, 1968.

F. Rado, Curs de geometrie. Lito. Univ. Babeș-Bolyai Cluj, 1972.

E. Rusu, Articole adresate profesorului de matematică. Cap. II-IV. Ed. did. și ped. București, 1957.

Gh. Vrânceanu, Noțiunea de spațiu. În volumul Probleme actuale de Matematică. Ed. did. și ped. București, 1968.

Gh. Vrânceanu, C. Teleman. Geometria euclidiană. Geometrii neeuclidiene. Teoria relativității. Editura tehnică, București, 1967.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME — ENUNȚURI[1]

Cap. I. Geometrie plană

● **1*** Pe laturile unui triunghi oarecare ABC, ca bază, se construiesc triunghiurile echilaterale ABD, ACE, BCF. Se duc dreptele AF, BE, CD. Să se arate că

1° $AF = BE = CD$,

2° AF, BE, CD sînt concurente și se taie sub un unghi de 120°.

● **2.** Un triunghi isoscel ABC ($AB = AC$) are unghiul A de 20°. Se construiesc în interiorul triunghiului unghiurile $\widehat{ABM} = 20°$ ($M \in AC$) și $\widehat{ACN} = 30°$ ($N \in AB$). Să se calculeze mărimea unghiului $\sphericalangle AMN$. (Ind. Pe AC se ia un punct D așa ca $\widehat{CBD} = 20°$).

● **3.** Se dă un triunghi ABC. Să se calculeze:

1° Unghiul dintre înălțimea și bisectoarea interioară corespunzătoare unghiului A, în funcție de unghiurile B și C.

2° Unghiurile determinate de bisectoarele interioare, apoi de bisectoarele exterioare ale unghiurilor B și C în funcție de unghiul A.

● **4*** Se dă triunghiul ABC. Perpendicularele duse în B și C pe laturile AB, AC, intersectează laturile AC, AB respectiv în D și E. Să se arate că:

1° Triunghiurile ABC și ADE sînt asemenea.

2° Dreptele MB, MC, unde M este mijlocul lui DE, sînt tangente cercului circumscris triunghiului ABC.

3° Ce condiție trebuie să îndeplinească triunghiul ABC pentru ca $DE = 2BC$?

● **5.** Fie ABC un triunghi dreptunghic în A, cu ipotenuza fixă și egală cu a. Se duce cercul care are ca diametru pe AH, înălțimea ce pleacă din vîrful unghiului drept. Acest cerc taie catetele AB și AC în M și respectiv N.

1° Să se demonstreze că cele patru puncte B, M, N, C sînt așezate pe un același cerc.

---

[1] Exercițiile marcate cu una sau două steluțe sînt de o dificultate mai mare.

2° Să se calculeze aria patrulaterului $BMNC$, în funcție de $a = BC$ și de unghiul B al triunghiului. Să se determine unghiul B așa fel ca raportul acestei arii și al ariei cercului de diametru AH să fie un număr pozitiv dat, K. Discuție.

● **6.** Să se demonstreze că în orice triunghi ABC, triunghiul care are ca vîrfuri picioarele bisectoarelor interioare, are aria egală cu produsul lungimilor celor trei bisectoare interioare, împărțit prin dublul perimetrului.

● **7**** Fiind dat triunghiul ABC, de arie S, pe laturile BC, CA, și AB se iau punctele α, β și γ care împart aceste laturi în același raport p/q.

1° Să se arate că triunghiurile ABC și $\alpha\beta\gamma$ au același centru de greutate.

2° Construind triunghiul $A'B'C'$, care are ca laturi segmentele $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$, notate cu a', b', c' și a cărui arie este S', să se demonstreze că:

$$\frac{a'^2+b'^2+c'^2}{a^2+b^2+c^2} = \sqrt{\frac{a'^4+b'^4+c'^4}{a^4+b^4+c^4}} = \frac{S'}{S} = \frac{p^2+pq+q^2}{(p+q)^2}.$$

3° Dacă dreptele $A\alpha$ și $B\beta$ se taie în punctul C_1; $B\beta$ și $C\gamma$ în A_1; $C\gamma$ și $A\alpha$ în B_1 să se arate că

$$\frac{AB_1}{AC_1} = \frac{p}{q}; \quad \frac{\alpha B_1}{\alpha C_1} = \frac{p^2}{q^2}.$$

4° Triunghiurile $A'B'C'$ și $A_1B_1C_1$ sînt asemenea avînd raportul de asemănare

$$\frac{B_1C_1}{a'} = \frac{q^2-p^2}{p^2+pq+q^2}.$$

● **8.** Se dă triunghiul dreptunghic ABC ($A = 90°$), în care $AB < AC$ și se ia pe ipotenuza BC punctul D astfel ca $AD = AB$. Perpendiculara din B pe AD taie dreapta AD în E și cateta AC în F. Se cere:

1° Să se arate că triunghiul BFC este isoscel.

2° Să se arate că punctul C este egal depărtat de dreapta AD și de paralela la AB, dusă prin D.

3° Să se calculeze segmentul BD, în funcție de laturile $BC = a$; $CA = b$; $AB = c$ ale triunghiului.

● **9.** Pe două din laturile triunghiului oarecare ABC se construiesc în afară, pătratele $ABMN$ și $BCPQ$, cu centrele O_1 și O_2. Să se arate că S și T, mijloacele laturilor AC și MQ, împreună cu O_1 și O_2 formează un pătrat.

● **10.** O dreaptă paralelă cu baza unui triunghi de arie S, delimitează din acesta un triunghi cu aria S_1. Să se afle aria patrulaterului pentru care trei vîrfuri coincid cu vîrfurile triunghiului mic, iar al patrulea se află pe baza triunghiului inițial.

● **11.** Într-un triunghi ABC dreptunghic în A, avem $AC=1$ și se știe că medianele AE și CF sînt perpendiculare. Se cere să se afle celelalte două laturi ale triunghiului.

● **12.** Triunghiul dreptunghic ABC, cu catetele b și c este împărțit în două părți de arii egale prin perpendiculara MN pe ipotenuza BC. Se cere să se calculeze aria cercului circumscris patrulaterului $BAMN$.

● **13*** Fie triunghiul ABC, înălțimile sale AD, BE, CF și ortocentrul H.

1° Să se enumere patrulaterele inscriptibile formate.

2° Să se găsească unghiurile egale cu unghiurile $\widehat{HDF}$ și $\widehat{HDE}$.

3° Să se arate că înălțimile triunghiului ABC sînt bisectoarele triunghiului DEF. Să se precizeze dacă acestea sînt bisectoare interioare sau exterioare, după cum triunghiul ABC are toate unghiurile ascuțite sau nu.

● **14*** Într-un triunghi ABO se dau $\widehat{AOB}=60°$, $OA=a$, $OB=b$. Dintr-un punct M de pe AB se duc paralele la OA și OB, care taie pe OA în P și pe OB în Q și bisectoarea exterioară a unghiului O, în P' și Q'.

1° În funcție de $OP=x$, să se calculeze aria patrulaterului $PQQ'P'$.

2° Să se studieze variația acestei arii cînd M parcurge segmentul AB și să se examineze în ce caz avem un extrem.

3° Să se arate că problema se poate reduce la studiul variației lui OM.

● **15.** Fie M mijlocul ipotenuzei BC a triunghiului dreptunghic ABC și H piciorul înălțimii din A. Mediatoarea segmentului AM taie pe AB în D și pe AC în E.

1° Să se calculeze unghiul $\widehat{DME}$.

2° Fie F și G proiecțiile lui H pe AB și AC.

Să se arate că $FG \| DE$.

● **16**** Dacă pe latura AC a unui triunghi ABC se ia, de la A spre C, lungimea $AD=AB$, avem:

$$BD^2=4\,\frac{h_b}{h_c}\,r\cdot r_a.$$

h_b, h_c fiind respectiv înălțimile relative la laturile b și c iar r, r_a razele cercurilor înscris și al celui exînscris în unghiul A.

● **17.** Prin vîrful A al triunghiului ABC se duc paralelele AD și AE la tangentele în B și C la cercul circumscris triunghiului ABC și se mărginesc la intersecțiile lor D și E cu BC. Să se demonstreze că

$$\frac{BD}{CE}=\frac{AB^2}{AC^2}.$$

● **18*** Fie triunghiul ABC și H ortocentrul său. Să se arate că simetricul C_1 a lui C în raport cu AB se află pe cercul ABH. Să se arate că triunghiul ABC este isoscel cu vîrful A dacă și numai dacă, cercul ABH este tangent în B la BC.

● **19.** Într-un triunghi oarecare ABC se duce înălțimea $AH=h$ și se notează $BH=m$, $CH=n$. Se cere lungimea segmentului DH, unde D este intersecția înălțimii precedente cu o altă înălțime. S-ar putea de aici dovedi proprietatea de concurență a înălțimilor?

● **20*** 1° Pe un segment PQ de lungime s, se ia un punct M și se notează $PM=u$, $MQ=v$. Notînd cu p și q două cantități pozitive fixe, se cere să se afle poziția punctului M pentru ca expresia pu^2+qv^2 să fie minimă.

2° Să se plaseze un punct M în interiorul unui triunghi ABC de laturi a, b, c, așa ca distanțele lui la cele trei laturi $M\alpha=x$, $M\beta=y$, $M\gamma=z$ să facă minimă suma $ax^2+by^2+cz^2$. Se va indica o construcție simplă a punctului M pentru care este realizat minimul sumei precedente.

● **21*** Dacă într-un triunghi dublul unei laturi este egal cu suma celorlalte două, bisectoarea interioară a unghiului opus acestei laturi este perpendiculară pe dreapta ce unește centrul cercului înscris cu centrul cercului circumscris triunghiului.

● **22.** În interiorul unui triunghi oarecare ABC se ia un punct K prin care se duc paralele la laturi. Se formează trei triunghiuri de arii S_1, S_2, S_3. Să se afle aria S a triunghiului ABC în funcție de aceste trei arii.

● **23.** Să se arate că într-un triunghi oarecare suma dintre pătratul distanței de la vîrf la ortocentru și pătratul laturii opuse vîrfului este egală cu pătratul diametrului cercului circumscris triunghiului.

● **24.** Se consideră triunghiul dreptunghic isoscel OAB, $OA=OB=a$. Din punctul A ducem dreptele AC și AD simetrice față de AB, C și D fiind pe OB.

1° Să se arate că $\sphericalangle CAO=\sphericalangle ADO$ și că $OC\cdot OD=OB^2$.

2° Să se calculeze $\sphericalangle CAB=x$, știind că $AC+AD=l$, unde l este o lungime dată. Discuție.

● **25.** Vîrfurile a doi munți sînt în același plan vertical cu un observator, căruia i se par ridicate deasupra orizontului cu $\alpha=10°30'$

și $\beta = 18°$. Observatorul deplasîndu-se cu $d = 5\,467$ m pe orizontala de la care s-au măsurat unghiurile și rămînînd în același plan vertical, vede cele două vîrfuri ridicate deasupra orizontului cu același unghi $\gamma = 35°30'$. Să se calculeze în metri, înălțimea deasupra orizontului, a fiecărui vîrf.

● **26.** Un turn de înălțime b, este prelungit cu o săgeată de înălțime a. În ce punct al planului orizontal, care trece prin piciorul turnului, trebuie să se plaseze un observator ca să vadă turnul și săgeata sub același unghi, h fiind înălțimea ochiului observatorului deasupra planului orizontal.

● **27*** Se dă triunghiul dreptunghic ABC și pe ipotenuza BC se construiește în afara triunghiului, pătratul $BCDE$.

1° Să se arate că dreapta care unește vîrful A al triunghiului cu centrul O al pătratului, este bisectoarea unghiului A.

2° Se duce tangenta în punctul A la cercul circumscris triunghiului ABC și se coboară perpendiculare din B și C pe această tangentă, respectiv în B_1 și C_1. Să se arate că perpendiculara din C_1 pe AC și perpendiculara din B_1 pe AB se întîlnesc în punctul H, piciorul înălțimii dusă din A pe BC.

● **28.** Să se arate că dacă diferența unghiurilor de la baza BC a unui triunghi ABC este egală cu un unghi drept, atunci înălțimea acestui triunghi este medie proporțională între distanțele piciorului său la extremitățile bazei. Să se examineze problema reciprocă și anume cînd se dă baza BC și unghiul C.

● **29.** Printr-un punct oarecare R al bazei BC a triunghiului ABC se duce paralela RNM la mediana AD a vîrfului A. Dacă N și M sînt intersecțiile acestei paralele cu laturile AC și AB, să se arate că suma $RN + RM$ este constantă.

● **30.** Într-un triunghi se cunosc două laturi și se știe că suma înălțimilor perpendiculare pe aceste laturi este egală cu a treia înălțime. Se cere să se calculeze a treia latură.

● **31.** Să se arate că dacă p reprezintă semiperimetrul unui triunghi și r raza cercului înscris în acest triunghi, avem:

$$p^2 \geqslant 27r^2.$$

● **32.** Se dă triunghiul ABC.

1° Să se construiască punctele D și E pe AC astfel ca $AD = DE = EC$.

2° BD intersectează mediana AM în I. Să se compare ID și ME. Să se calculeze raportul $\dfrac{DI}{DB}$.

3° CI taie pe AB în K. Să se calculeze $\frac{AK}{BK}$.

4° Paralela dusă prin A la CK taie pe BC în L.

Să se arate că C este mijlocul segmentului ML.

Să se arate apoi că punctele I, E, L sînt coliniare.

● **33.** Se dă triunghiul ABC, B', C' picioarele înălțimilor din B și C, iar B_1 și C_1 proiecțiile punctelor B și C pe dreapta $B'C'$. Dacă B_a, C_a sînt proiecțiile punctelor B', C' pe BC, să se arate că:

1° $B_1C_a \| AC$ și $C_1B_a \| AB$;

2° $C_aC_1 \| BB'$ și $B_aB_1 \| CC'$;

3° Punctele B_a, C_a sînt pe cercul de diametru C_1B_1.

● **34.** Se dă triunghiul oarecare ABC cu baza $BC=a$ și înălțimea $AH=h$. Ducem o dreaptă $B'C'$ paralelă cu BC care întîlnește AB în B' și AC în C'. Notăm cu O intersecția dreptelor BC' și $B'C$.

1° Să se demonstreze că triunghiurile BOB' și COC' au aceeași arie.

2° Să se calculeze aria trapezului $BB'C'C$ în funcție de distanța x dintre cele două drepte paralele BC și $B'C'$. Să se studieze variația acestei arii cînd x variază între O și h.

3° Să se calculeze aria triunghiului BOC în funcție de x.

● **35.** Fie ABC un triunghi, AD bisectoarea interioară a unghiului A, punctul $D \in [BC]$. Se dă: $BC=a$, $b+c=l$, $(l>a)$ și $AD=d$.

1° Să se verifice egalitatea

$$d^2 = bc \cdot \frac{l^2 - a^2}{l^2}.$$

2° Să se construiască ecuația de gradul II a cărei rădăcini sînt b și c. Lungimile a și l fiind fixe, să se găsească între ce limite poate varia d pentru ca triunghiul să existe.

● **36.** Într-un trapez isoscel linia mediană este egală cu d, iar diagonalele sînt perpendiculare. Să se găsească aria trapezului.

● **37*** Să se arate că dacă într-un triunghi ABC latura opusă unghiului A este medie proporțională între diametrul cercului înscris și a cercului exînscris corespunzător unghiului A, triunghiul este isoscel.

● **38*** Se dă triunghiul ABC dreptunghic în A, înălțimea sa AH și în exteriorul său pătratele $ABDE$ și $ACFG$.

1° Să se arate că $F \in AD$ și că mulțimea celor șase puncte B, C, F, G, E, D are o axă de simetrie.

2° Fie K mijlocul lui EG; să se arate că $K \in AH$.

3° Fie $P = DE \cap FG$. Să se arate că $P \in AH$.

4° Să se compare triunghiurile DBC și ABP. Să se deducă apoi că segmentele CD și BP sînt egale și perpendiculare. Să se arate aceeași proprietate pentru segmentele BF și CP.

5° Să se arate că dreptele AH, CD și BF au un punct comun.

● **39.** Într-un triunghi ABC, dreptunghic în A, se duce bisectoarea unghiului drept; ea taie cercul circumscris în punctul F. Pe AF ca diametru se descrie un cerc care întîlnește dreptele AB și AC în D și E. Să se stabilească relația:

$$\frac{AB+AC}{AF}=\frac{EF+EA}{ED}.$$

● **40.** În triunghiul ABC, $\hat{A}=2\hat{B}$.

1° Să se calculeze unghiurile A, B, C cînd triunghiul este isoscel sau dreptunghic.

2° Fie AD $(D\in BC)$ bisectoarea unghiului A.
Să se arate că bisectoarea unghiului ADC este paralelă cu AB.

3° Să se arate că CA este medie proporțională între BC și CD.

● **41.** Fie triunghiul isoscel ABC $(AB=AC)$ și punctul O de pe AC, centrul cercului tangent în B dreptei AB. Dreapta BC taie din nou cercul O în D. Să se studieze unghiurile figurii. Să se deducă de aici natura triunghiului COD.

● **42.** Să se arate că picioarele înălțimilor corespunzătoare la două vîrfuri ale unui triunghi și cu al treilea vîrf, formează un triunghi asemenea cu triunghiul dat.

● **43*** Fie ABC un triunghi dreptunghic $(A=90°)$ și BC_1, BC_2 două drepte care împart unghiul ascuțit B în trei părți egale, C_1 și C_2 fiind pe AC. Notînd cu R_1, R_2 și R_3 razele cercurilor circumscrise triunghiurilor ABC_1, C_1BC_2, și C_2BC, să se demonstreze inegalitățile

1° $R_1<R_2<R_3$,

2° $R_2^2<R_1\cdot R_3$.

● **44*** Într-un triunghi dreptunghic ABC mărim cateta AC cu segmentul CC' și în același timp micșorăm cateta AB cu segmentul $B'B=CC'$. Unim apoi B' cu C'. Se cere:

1° În ce punct M, taie dreapta $B'C'$ ipotenuza BC.

2° Care este poziția limită a punctului de intersecție M, cînd $B'C'$ tinde să coincidă cu BC.

● **45*** Se consideră triunghiurile T în care laturile x, y, z sînt legate prin relația:

$$x=2(y-z)$$

și fie $2p$ perimetrul triunghiului.

1° Să se determine în funcție de p, lungimile laturilor acelora din triunghiurile T care au un unghi drept și în care x sau y este ipotenuză.

2° Între ce limite trebuie să varieze x pentru ca să se poată forma un triunghi T cu perimetrul $2p$ dat.

3° Luînd $p=12$, să se determine triunghiurile T ale căror laturi sînt măsurate prin numere naturale.

● **46*** Se dă perimetrul $2p$ și aria S a unui triunghi dreptunghic.

1° Să se calculeze ipotenuza și apoi celelalte două laturi.

2° Perimetrul $2p$ fiind dat, ce condiție trebuie să satisfacă S ca problema să fie posibilă.?

3° Dintre triunghiurile dreptunghice care au perimetrul 12 cm, să se construiască acela care are aria maximă. Luînd ca unitate de suprafață milimetrul pătrat să se calculeze aria triunghiului cu aproximație de o unitate prin lipsă.

● **47.** Să se arate că într-un triunghi ABC unde am notat a,b,c laturile sale și m_a, m_b, m_c medianele corespunzătoare acestor laturi, avem relația

$$m_a^4+m_b^4+m_c^4=\frac{9}{16}\,(a^4+b^4+c^4).$$

● **48.** Fie triunghiul dreptunghic ABC ($A=90°$), I și J centrele cercurilor înscris și exînscris în unghiul A.

1° Fie D și E proiecțiile lui I pe AB și AC. Să se studieze patrulaterul $ADIE$. Să se arate că suma diametrilor cercurilor înscris și circumscris triunghiului ABC este egală cu suma catetelor triunghiului.

2° Fie F și G proiecțiile lui J pe AB și AC. Să se arate că diferența diametrilor cercurilor exînscrise unghiului A și a cercului circumscris triunghiului este egală cu suma catetelor triunghiului.

● **49.** Să se arate că dacă laturile unui triunghi dreptunghic sînt în progresie aritmetică, rația progresiei este lungimea razei cercului înscris.

● **50.** Considerăm triunghiul dreptunghic ABC ($A=90°$) și O mijlocul lui BC. Două drepte perpendiculare între ele OM și ON taie respectiv laturile AB și AC în M și N.

1° Să se compare unghiurile $\widehat{OMN}$ și $\widehat{ACO}$.

2° Să se arate că $\Delta OMN\sim\Delta ABC$.

3° Triunghiul ABC rămînînd fix, OM, ON variind astfel ca $OM\perp ON$, să se afle minimul lungimii segmentului MN precum și minimul ariei OMN.

● **51.** Se dă triunghiul dreptunghic ABC ($A=90°$). Se duce înălțimea AD și bisectoarea BE a unghiului B, care se intersectează în I. Se cere aria triunghiului BDI în funcție de catetele b, c ale triunghiului.

● **52.** În triunghiul ABC, dreptunghic în A, fie H proiecția lui A pe BC. Să se calculeze distanța HN de la H la mediana AM. Să se afle elementele triunghiului dacă $AH=2HN$.

● **53.** Dintr-un punct oarecare P interior triunghiului ABC se duc perpendicularele PA', PB', PC' respectiv pe laturile BC, CA, AB. Să se arate că avem relația:

$$BC^2+CA^2+AB^2=2(BC\cdot BA'+CA\cdot CB'+AB\cdot AC').$$

● **54.** Se dă un cerc, AB un diametru al său, C un punct variabil pe cerc și D punctul unde dreapta AC intersectează tangenta în B la cerc. Pe BC în sensul de la B la C luăm un punct E astfel ca $BE=BD$ și prin E ducem paralela la AB care intersectează pe AC în F.

Să se afle locul geometric al punctului F, cînd C descrie cercul dat.

● **55*** Două cercuri O și O' de raze R și R' sînt tangente exterioare în M. Un unghi drept BMA se rotește în jurul lui M, laturile sale întîlnind respectiv cercurile O și O' în B și A.

1° Să se demonstreze că dreapta BA trece printr-un punct fix.

2° Să se afle locul geometric al mijlocului segmentului BA.

● **56*** Un cerc de rază dată R este tangent la laturile unui unghi drept xAy. Tangenta într-un punct M a acestui cerc intersectează Ax în B și Ay în C. Notăm $AB=x$, $AC=y$.

1° Să se stabilească o relație între x, y și R și să se arate cu ajutorul acestei relații, că aria triunghiului ABC este egală cu produsul segmentelor MB și MC.

2° Să se exprime y în funcție de x și R și să se studieze variația acestei funcții dacă x variază între $2R$ și $+\infty$. Să se arate că acest studiu permite determinarea și trasarea locului geometric al celui de-al patrulea vîrf al dreptunghiului construit pe AB și AC.

● **57*** Se dau două cercuri inegale O și O' tangente exterioare în A ($OA>O'A$). De aceeași parte a liniei centrelor, construim din A la cele două cercuri două coarde variabile AB, AB' astfel ca să avem $\dfrac{AB}{AB'}=\dfrac{AO}{AO'}$.

1° Să se determine locul geometric al punctului de intesecție al razelor OB, $O'B'$.

2° Să se afle locul geometric al centrului cercului circumscris triunghiului ABB'.

● **58.** Se consideră un cerc fix C de centru O, un punct fix A în planul său și un diametru variabil MM' al cercului. Dreapta MA intersectează cercul în Q și în P paralela la OA dusă prin M'. Dreapta $M'A$ intersectează cercul în Q' și în P' paralela la OA dusă prin M.

1° Să se arate că segmentul PP' are mijlocul său I fix. Să se determine locul geometric al punctelor P și P'.

2° Să se arate că suma $MP^2+M'P'^2$ este constantă.

● **59.** Trei cercuri egale de centre respectiv O_1, O_2, și O_3, trec prin punctul I. Două cîte două se mai intersectează în punctele P, Q, R. Notăm cu A, B, C, mijloacele lui IP, IQ și IR.

1° Să se compare triunghiurile PQR, $O_1O_2O_3$ cu triunghiul ABC.

2° Să se arate că cercul ce trece prin punctele P, Q, R este egal cu cele trei cercuri date și că centrul lui este ortocentrul triunghiului $O_1O_2O_3$.

● **60*** Două cercuri egale de centre C și C' conțin fiecare centrul celuilalt cerc. Se cere să se determine un al treilea cerc de centru C'' care să fie tangent celor două cercuri și liniei centrelor CC'. Să se calculeze raza acestui cerc în funcție de raza R a cercurilor date.

● **61.** Fie cercul de diametru AB, o coardă AC și bisectoarea unghiului BAC care taie cercul în D. Să se arate că:

1° $\overset{\frown}{ACD}-\overset{\frown}{CAD}=90°$,

2° Tangenta în D la cerc este perpendiculară pe AC.

● **62.** Se consideră cercul cu centrul în O și de diametru $AB=2R$. Dintr-un punct M de pe cerc se coboară perpendiculara MH pe AB și se ia pe ea un punct P astfel ca să avem

$$\frac{HP}{HM}=K<1.$$

Pe diametrul AB se ia punctul O_1 la distanța $OO_1=R\sqrt{1-K^2}$ și se notează cu O_2 conjugatul său armonic în raport cu A,B.

1° Să se demonstreze că oricare ar fi poziția punctului M pe cercul (O), avem $\dfrac{PO_1}{HO_2}=\sqrt{1-K^2}$.

2° Dacă O_1' este simetricul lui O_1 în raport cu O avem

$$PO_1+PO_1'=2R.$$

3° Locul geometric descris de punctul P.

● **63.** Pe un cerc dat, cu centrul în O, se consideră două puncte fixe, A și B, și un punct variabil M. Se cere locul geometric descris de centrul cercului care trece prin A și este tangent în M la dreapta BM.

● **64.** Pe un cerc cu centrul în punctul O și raza r se iau două puncte A și B. Pe prelungirea segmentului AO, dincolo de O și în afara cercului se ia un punct C. Dreapta BC întîlnește cercul în punctul D. Să se arate că dacă $CD=r$, atunci unghiul OCD este a treia parte din unghiul AOB (Arhimede). Cît este acest unghi dacă punctele A și C sînt de aceeași parte a centrului O. Condiții de posibilitate ale celor două construcții.

● **65*** Într-un cerc cu centrul O și raza R, se duce un diametru AB și o coardă CD perpendiculară pe acest diametru în punctul E. Se descrie cercul avînd pe CD ca diametru și din punctul A se duc tangentele AT, AT' la acest cerc. Fie I punctul de intersecție al lui AB și TT'.

1° Să se arate că punctul E este mijlocul segmentului IB.

2° Punînd $BE=x$, să se exprime în funcție de R și x, aria triunghiului ATT'.

3° Să se studieze variația acestei arii cînd punctul E se deplasează pe AB. Să se traseze curba corespunzătoare, luînd raza ca unitate.

4° Să se afle locul geometric al centrului de greutate al triunghiului BCI.

● **66**** Fie BC diametrul unui cerc dat și A un punct fix pe acesta, exterior cercului, așa ca A și B să fie de aceeași parte a centrului O al cercului. Fie M un punct variabil al cercului.

1° Să se afle locul punctului P de întîlnire a dreptei AM cu perpendiculara în B la BM, precum și a celui de al patrulea vîrf Q al dreptunghiului construit pe MB și BP (se va arăta că dreapta QP taie treapta ABC într-un punct fix I).

2° Alegînd pe cerc punctul M astfel ca să avem $AB^2=AP\cdot AM$, se cere unghiul OMA.

3° Pe BM ca latură, se construiește pătratul $MBP'Q'$. Să se afle locul vîrfurilor P', Q', cînd M descrie cercul dat.

● **67.** Se consideră un cerc cu centrul în C și în el două coarde AA' și BB', care se taie în D. Fie O și O' centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor ADB și $A'DB'$, iar F al doilea punct comun celor două cercuri. Să se demonstreze că:

1° patrulaterul $CODO'$ este un paralelogram și

2° dreptele FC și FD sînt perpendiculare.

● **68.** Să se arate că în orice triunghi:

1° Simetricele ortocentrului față de laturi și față de mijloacele laturilor, sînt situate pe cercul circumscris triunghiului;

2° Distanța de la un vîrf la ortocentru, este dublul distanței de la centrul cercului circumscris la latura opusă.

● **69*** Fie AB o coardă a unui cerc O ce trece prin vîrfurile triunghiului ABC. Ea se prelungește cu o lungime $BA_1=AB$. Să se demonstreze că dacă punctul C descrie cercul dat, atunci simetrica medianei dusă din B, în triunghiul A_1BC, în raport cu bisectoarea unghiului ABC rămîne fixă.

● **70*** Se dă triunghiul ABC. Se descriu trei cercuri de raze egale avînd ca centre vîrfurile triunghiului. Cercul cu centrul în A intersectează laturile AB, AC respectiv în M_1, N_1. Notăm cu M_2, N_2, M_3, N_3 punctele analoage pentru cercurile cu centrul în B, respectiv C. Să se demonstreze că intersecțiile dreptelor M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3 sînt trei puncte coliniare.

● **71*** Fie $ABCD$ un patrulater (convex sau nu) înscris într-un cerc. Paralela la BD dusă prin A intersectează cercul circumscris în E. Notăm $BD \cap EC=F$.

1° Să se arate că $AD \cdot BC=FB \cdot AC$ și $AB \cdot CD=FD \cdot AC$.

2° Să se deducă apoi teorema lui Ptolemeu: în orice patrulater convex înscris, produsul diagonalelor este egal cu suma produselor laturilor opuse.

3° Ce devine teorema precedentă în cazul unui patrulater concav înscris într-un cerc?

● **72.** Să se arate că cea mai lungă secantă ce se poate duce printr-unul din punctele de intersecție a două cercuri este paralelă cu linia centrelor.

● **73*** Fie triunghiul ABC și un punct oarecare P pe cercul circumscris. Dreptele PA, PB, PC, întîlnesc respectiv laturile BC, CA, AB în A', B', C'. Să se arate că punctul de intersecție al înălțimilor triunghiului $A''B'C'$ este centrul O al cercului circumscris triunghiului ABC.

● **74.** Dacă prin centrele I și I_a, ale cercurilor înscris și exînscris în unghiul A al triunghiului ABC, se duc paralelele DE și FG cu latura BC și punctele D și F, E și G sînt pe laturile triunghiului, atunci $\frac{1}{DE}+\frac{1}{FG}=\frac{2}{BC}$.

● **75.** În două cercuri de centre O,O', raze R, R' și tangente în punctul A, se duc două corzi perpendiculare AB și AC (B pe cercul O, iar C pe cercul O'). Să se arate că dreapta BC trece printr-un punct fix.

● **76*** Pentru a construi un oval, se împarte segmentul $AA'=3a$ în trei părți egale și fie B, C punctele de subdiviziune. Cercurile cu centrele în B și C și raza a se taie în punctele D,D', care sînt centrele cercurilor de racordare, ce leagă două arce de cerc cu centrele

în B și C și raza a. Acestea sînt mărginite de dreptele $D'B$ și DB, respectiv de dreptele $D'C$ și DC. Se cere să se exprime aria ovalului.

Aceeași problemă pentru un oval obținut împărțind pe $AA' = 4a$, în patru părți egale prin punctele B, C, D și construind un pătrat cu diagonala BC, celelalte două vîrfuri E și F fiind centrele cercurilor de racordare, ce leagă două arce de cerc cu centrele în B și D și raza a, mărginite de EB și FB, respectiv de ED și FD.

● **77*** Să se afle raza cercului tangent la cele două cercuri tangente exterior și la tangenta comună a acestora.

● **78**** Trei cercuri de raze 1, 2, 3 sînt două cîte două tangente exterior. Se cere raza cercului înscris în triunghiul curbiliniu determinat de cele trei cercuri.

● **79.** Aria unui sfert de cerc OAB, cu centrul O și raza R, se împarte în două părți printr-un alt cerc cu aceeași rază, dar cu centrul în A. Să se afle razele cercurilor înscrise în cele două triunghiuri curbilinii formate.

● **80.** Pe un segment AB, și de aceeași parte, se construiesc un semicerc de diametru AB și alte două de raze egale, tangente între ele și tangente interior primului semicerc. Se cere raza cercului înscris în triunghiul curbiliniu format de cele trei semicercuri.

● **81*** Pe un segment AB și de aceeași parte, se construiește un semicerc de diametru AB și alte două semicercuri de raze R și r tangente între ele și tangente interior semicercului precedent. Se cere să se calculeze raza cercului înscris în triunghiul curbiliniu format de cele trei semicercuri.

● **82.** Cunoscînd lungimile a, b, c ale corzilor corespunzătoare la trei arce care formează un semicerc de rază R, să se afle ecuația care determină această rază.

● **83*** Să se calculeze raza unui cerc știind lungimile a și b a două corzi ale lui care au un capăt comun și distanța d dintre mijloacele lor.

● **84.** Se consideră două cercuri concentrice cu centrul O și razele R, r. Să se arate că suma pătratelor distanțelor de la un punct variabil pe un cerc, la capetele unui diametru fix al celuilalt cerc, este o mărime constantă.

● **85**** Pe un cerc se consideră patru puncte fixe A, B, E, F și un punct mobil C. Coarda EF taie pe CA și CB, în M și N. Să se arate că avem

$$\frac{EM \cdot NF}{MN} = \text{const.}$$

● **86.** Două corzi AA', BB' ale unui cerc se taie într-un punct D și tangentele la cerc în A și A' taie respectiv pe BB' în C și C'. Să se arate că avem

$$\frac{DC}{DC'}=\frac{AC}{A'C'}.$$

● **87*** Pe un cerc cu centrul în O, se ia un punct mobil A, prin care se duc corzile AMB, ANC care trec prin două puncte fixe M și N simetrice față de O. Să se arate că avem

$$\frac{AM}{MB}+\frac{AN}{NC}=\text{const.}$$

● **88.** Să se arate că dacă un cerc de rază r este înscris în sectorul circular AOB aparținînd unui cerc de rază R și dacă coarda AB a sectorului are lungimea $2c$, avem relația $\frac{1}{r}=\frac{1}{R}+\frac{1}{c}$.

● **89.** Într-un cerc dat să se ducă o coardă de lungime dată, paralelă cu o dreaptă dată.

● **90.** Se consideră un sfert de cerc BOA. Se duce o paralelă la dreapta AB, care taie sfertul de cerc în C, iar prelungirile razelor OA și OB, în P și Q. Să se arate că $AB^2=PC^2+CQ^2$.

● **91.** Două cercuri de raze R și r sînt tangente exterior. Să se afle aria trapezului cu vîrfurile în punctele de contact ale tangentelor comune exterioare.

● **92.** Să se arate că bisectoarele unui patrulater oarecare, formează un patrulater inscriptibil.

● **93.** Pe cele trei laturi ale unui triunghi, ca diametre, se duc în afara triunghiului semicercuri la care se duc tangentele comune. Să se arate că suma pătratelor inverselor tangentelor comune, mărginite la punctele de contact, este egală cu inversul pătratului razei cercului înscris triunghiului.

● **94*** Într-un cerc cu raza R se înscriu trei cercuri egale, două cîte două tangente.

1° Să se afle aria triunghiului curbiliniu format de aceste trei cercuri.

2° Să se calculeze raza unui cerc tangent interior cercului de rază R și tangent exterior la două din cele trei cercuri egale.

● **95.** Fie cercul (O) de centru O, un punct $A\in(O)$, simetricul B al lui O în raport cu A și proiecția H a lui B pe tangenta CT la cerc într-un punct C.

1° Presupunînd că dreapta CT nu taie segmentul AB, să se arate că unghiurile $\widehat{OAC}$ și $\widehat{AHB}$ sînt simetric așezate față de perpendiculara AA_1 dusă din A pe CT și că $\widehat{OAH}=3\cdot\widehat{AHB}$.

2° Dacă dreapta $C'T'$ taie segmentul AB, să se arate că $\widehat{OAH'}+2\text{ dr}=3\widehat{AH'B}$.

● **96*** Se consideră cercul cu centrul O și raza R, unul din diametrii săi fiind AA'. Dacă M este un punct mobil pe cerc, să notăm cercurile care trec prin punctele M,O,A și M,O,A' respectiv cu (C) și (C') și razele lor cu r, r'. Să se demonstreze că:

1° Cercurile (C), (C') se taie ortogonal.

2° Avem formula

$$\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r'^2}=\frac{4}{R^2}.$$

3° Proiecția tangentei comune a cercurilor (C) și (C'), pe linia centrelor, are o lungime constantă și egală cu R.

● **97*** Pe un cerc se consideră două puncte fixe A, B și un punct variabil P. Prin polul O al coardei AB ducem o paralelă la AB, care întîlnește PA și PB respectiv în M și N. Să se arate că $OM\cdot ON=$ =constant și că cercul MNP este tangent în P la cercul dat.

● **98.** Fiind dat un cerc de rază R și un alt cerc de rază $\frac{R}{2}$, tangent interior primului cerc, să se construiască un al treilea cerc, tangent la cele două cercuri și la diametrul care unește centrele celor două cercuri date.

● **99.** Într-un triunghi echilateral de latură a se înscriu trei cercuri de rază r, care sînt două cîte două tangente. Să se calculeze aria triunghiului curbiliniu mărginit de cele trei cercuri.

● **100*** Dacă unghiul A al unui triunghi ABC al cărui centru al cercului circumscris este O, este de 45°, dreapta care leagă simetricul vîrfului A prin raport cu mijlocul lui BC, cu punctul unde perpendiculara în O pe AO întîlnește pe BC, este perpendiculară la dreapta OH care leagă ortocentrul H cu centrul O al cercului circumscris.

● **101*** Fiind date două cercuri de centre O și O', care se taie într-un punct A, se cere să se ducă prin A o dreaptă MN de lungime dată $2k$, unde M este pe un cerc, iar N pe celălalt. Discuție.

● **102*** Într-un cerc cu centrul O, pe mijlocul C al unei raze OA se ridică o perpendiculară CE, care întîlnește cercul în E. Fie OF raza

paralelă cu CE și de același sens și M un punct de pe arcul EF astfel luat încît ducînd dreapta OM, care taie pe CE într-un punct D, să avem $MD=MA$. Se duce dreapta DA și fie H al doilea punct unde ea întîlnește cercul O. Să se arate că HM este latura heptagonului regulat înscris în cerc.

● **103.** În triunghiul isoscel ABC se înscrie un semicerc de centru O și al cărui diametru este pe baza BC a triunghiului. Tangenta la semicerc într-un punct P taie laturile egale ale triunghiului în punctele M și N (M este pe AB). Să se arate că triunghiurile BOM și CON sînt asemenea și că mărimea $BM \cdot CN$ este constantă.

● **104.** Centrul O_1 al unui cerc de rază 3 cm, se află pe un alt cerc cu centrul în O și raza 5 cm. Se duce tangenta OA la primul cerc. Notînd cu F și B intersecțiile corzii comune CD a celor două cercuri, cu raza O_1A și linia centrelor OO_1, se cere să se calculeze lungimea segmentului BF.

● **105*** La capetele unui segment AB, de lungime d, se duc de aceeași parte perpendicularele AA', BB'. În interiorul liniei frînte formate, construim două cercuri tangente între ele și tangente fiecare la AB și la cîte una din dreptele AA' și BB'. Notînd cu o și O centrele și cu r, R razele lor, să se calculeze una dintre raze în funcție de cealaltă și să se dea o construcție grafică.

● **106.** Pe dreapta OX se descrie sfertul de cerc OAB, de rază R ($A \equiv OX$). În B, paralel cu OX, se duce tangenta BC și apoi dintr-un punct C de pe aceasta, se duce tangenta CD, punctul D fiind pe OX.

1° În funcție de raza R și unghiul $\omega = \sphericalangle BOC$, să se calculeze perimetrul patrulaterului $OBCD$.

2° Să se studieze variația lungimii perimetrului cînd D se deplasează pe OX.

3° Să se calculeze poziția punctului D, unghiul ODC și perimetrul, cînd acesta este minim, cu $R=(10\sqrt{2}-5)$ m.

● **107.** Într-un cerc cu centrul O și raza R, se duce un diametru AB și o coardă CD, perpendiculară pe acest diametru în punctul E. Se descrie cercul avînd pe CD ca diametru și din punctul A se duc tangentele AT, AT' la acest cerc. Fie I punctul de intersecție a lui AB și TT'.

1° Să se arate că punctul E este mijlocul segmentului IB.

2° Punînd $BE=x$, să se exprime în funcție de R și x, aria triunghiului ATT'.

● **108.** Într-un cerc de rază R și cu centrul O, se înscrie un dreptunghi ale cărui laturi sînt paralele cu doi diametri perpendiculari OS și OT.

A) Presupunînd că este cunoscut perimetrul dreptunghiului, egal cu $4a$,

1° Dacă se notează cu $2x$ și $2y$ lungimile laturilor dreptunghiului, să se formeze și să se rezolve sistemul de ecuații care dă pe x și y.

2° Se notează cu $2u$ unghiul sub care se vede una din laturile dreptunghiului din centrul cercului O. Să se formeze, să se rezolve și să se discute ecuația care dă pe u.

3° Să se construiască dreptunghiul fără a întrebuința calculele făcute, numai folosind datele geometrice.

B) Presupunînd că perimetrul este necunoscut și-l notăm cu $4l$, să se studieze variația lui l, cînd unghiul u (definit mai sus) variază.

● **109.** Se dă un cerc cu raza R. Să se determine aria s_n a poligonului regulat cu n laturi înscris în acest cerc; aria S_n a poligonului regulat cu n laturi circumscris aceluiași cerc. Utilizînd formulele obținute să se arate că cele două arii tind către aceeași valoare, cînd $n \to \infty$.

● **110*** Să se arate că centrul radical al celor trei cercuri exînscrise unui triunghi ABC este centrul cercului înscris triunghiului $A'B'C'$ cu vîrfurile în mijloacele laturilor triunghiului ABC.

● **111*** Prin două vîrfuri alăturate ale unui pătrat se duce un cerc astfel ca tangenta la cerc din al treilea vîrf al pătratului să fie egală cu de două ori latura. Să se afle raza cercului, dacă aria pătratului este 10 cm^2.

● **112.** În același cerc avem două unghiuri egale, unul este la centru, iar altul înscris. Să se arate că cele două corzi ce le corespund sînt egale dacă fiecare unghi este egal cu $\frac{4}{3}$ dr.

● **113.** Două cercuri de raze R și r sînt tangente exterior. Să se afle segmentul din tangenta interioară comună, cuprins între punctele de tangență și una din tangentele comune exterioare.

● **114*** Se dă un cerc (O) și un cerc (O') interior primului cerc. O tangentă variabilă la cercul (O') intersectează cercul (O) în M și N. Să se găsească locul geometric al centrului cercului circumscris triunghiului $MO'N$, O' fiind centrul cercului (O').

● **115**** Cercul care are ca diametru înălțimea AH a unui triunghi ABC, întîlnește laturile AB și AC în punctele E, respectiv F, care se proiectează pe înălțimea AH în E_1 și F_1. Dreptele EH și BF_1 se întîlnesc în M, iar dreptele FH și CE_1 sînt concurente în N. Dreapta MN intersectează dreapta AH în D. Să se arate că:

1° MN este paralelă cu BC,

2° $DN^2 = EM \cdot DH$.

● **116.** 1° În cercul de rază R și cu centrul în O, să se arate cum se construiește o coardă de lungime dată l și care să fie paralelă cu o dreaptă dată (Δ).

2° Să se afle locul geometric al mijloacelor coardelor cercului care trec printr-un punct dat P. Discuție.

3° Să se afle locul geometric al punctelor din plan de unde cercul se vede sub un unghi drept.

● **117.** Fiind date două cercuri exterioare de centre O și O', să se demonstreze că cercul cu diametrul OO' trece prin punctele de intersecție ale tangentelor comune exterioare și interioare.

● **118.** Fie cercul de centru O și un punct A al lui în care ducem tangenta AT. Dacă B este un alt punct al cercului și H proiecția lui pe AT, să se arate că AB este bisectoarea unghiului OBH.

● **119.** Se dă un cerc O de rază R și un punct I în planul său astfel ca $OI=3R$.

1° Să se determine pe OI două puncte M și N astfel ca punctul I să fie mijlocul segmentului MN și ca produsul $OM \cdot ON = R^2$.

Să se calculeze OM și ON.

2° Să se determine pe cercul dat un punct P astfel ca $PM^2 + PN^2 = 2k^2$, k fiind o lungime dată. Între ce limite trebuie să fie cuprins k pentru ca problema să fie posibilă?

● **120.** Fie două cercuri C_1 și C_2, de centru O și de raze R_1 și $R_2 (R_1 < R_2)$, și două puncte $M \in C_1$ și $A \in C_1$. Perpendiculara în A pe MA taie cercul C_2 în B și D și cercul C_1 în N. Să se arate că dacă M descrie cercul C_1, sumele $S_1 = MA^2 + AB^2 + AD^2$ și $S_2 = MB^2 + MD^2 + BD^2$ sînt constante.

● **121*** Se dau două cercuri secante (O) și (O_1) și fie A unul din punctele lor comune. O dreaptă care trece prin A taie cercul (O) în B și cercul (O_1) în C. Tangentele în A și B la cercul (O) se intersectează în punctul D, tangentele în A și C la cercul (O_1) se intersectează în E.

1° Să se arate că, dacă dreapta BC variază, unghiul BMC al dreptelor BD și CE rămîne constant și egal cu unghiul dreptelor AD și AE.

2° O altă dreaptă trecînd prin A, taie cercul (O) în F și cercul (O_1) în G. Dreptele FB și GC se taie în P. Să se arate că unghiul dreptelor PF și PG este egal cu cel al dreptelor AD și AE.

● **122.** Se dă un cerc de centru O și rază R, și două drepte perpendiculare în P, care intersectează cercul, una în A și B, cealaltă în C și D. Fie H și K mijloacele respective ale coardelor AB și CD. Să se calculeze în funcție de OP și R sumele:

$S_1 = OH^2 + OK^2$; $S_2 = AB^2 + CD^2$; $S_3 = PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2$.

● **123.** Se dă semicercul de diametru $AB = 2R$ și centrul O. Pe prelungirea lui AB se ia, dincolo de B, un punct C din care se duce tangenta CD la semicerc. Proiectăm punctul de tangență D în H pe AB și unim centrul O cu D. Notăm $OC = x$.

1° Să se calculeze OH și HB în funcție de R și x.

2° Ducem coarda $DE \parallel AB$ și unim E cu A. Să se calculeze laturile trapezului $CDEA$, în funcție de R și x.

3° M și N fiind mijloacele laturilor neparalele ale trapezului, să se calculeze MN în funcție de R și x și să se studieze variația acestei lungimi dacă punctul C se deplasează pe prelungirea lui AB.

● **124.** Să se determine punctul P aflat pe un semicerc de diametru $AB=2a$, astfel ca $2AP^2-m\,PB^2=a^2$. Discuție după valorile lui m.

● **125.** Să considerăm un trapez $ABCD$ cu baza mică $AB=a$ și laturile neparalele BC și AD. Pe aceste două laturi se construiesc, în afara trapezului, pătratele $BB'C'C$ și $AA'D'D$. Fie h înălțimea trapezului, $\lambda=\operatorname{ctg} \widehat{ADC}$ și $\mu=\operatorname{ctg} \widehat{BCD}$. Perpendiculara pe AB în mijlocul său M, întîlnește pe $A'B'$ în N. Să se arate că:

1° N este mijlocul lui $A'B'$, $MN=\dfrac{DC-AB}{2}$;

2° $A'B'^2=a^2+4ah+h^2[4+(\lambda-\mu)^2]$; aria $ABB'A'=\dfrac{h(a+h)(\lambda+\mu)}{2}$.

● **126.** Un trapez isoscel se deformează așa fel că aria lui rămîne egală cu a unui pătrat de latură a. Unghiurile de la baza mare sînt constante și egale cu 30°.

1° Să se exprime perimetrul trapezului în funcție de înălțimea lui, x.

2° Să se studieze variația perimetrului și să se construiască trapezul de perimetru minim.

● **127.** Se notează cu $2x$ înălțimea unui trapez isoscel, cu $2u$ și $2v$ cele două baze ale lui.

1° Să se demonstreze că $x=uv$ este o condiție necesară și suficientă ca trapezul să fie circumscriptibil unui cerc.

2° Să se calculeze laturile și unghiurile unui trapez isoscel știind că este circumscriptibil unui cerc și cunoscînd aria lui, notată cu m^2. ca și lungimea diagonalei, notată cu l.

● **128*** Să se demonstreze că dacă într-un trapez dreptunghic $ABCD$ ($AD \perp AB$ și $AB \parallel DC$) segmentul care unește mijloacele bazelor este media lor aritmetică, atunci patrulaterul care se obține unind centrele de greutate ale triunghiurilor OAD, ODC, OCB și OBA, cu vîrful comun în punctul O, intersecția diagonalelor, este un dreptunghi.

● **129.** Într-un patrulater $ABCD$ avem $AB=BC$, $CD=DA$ și unghiul din B este drept. Acest patrulater se află într-un plan vertical și stă în planul orizontal pe cea mai mică latură AB. Între ce limite trebuie să fie cuprins raportul $\dfrac{AD}{AB}$ pentru ca să fie echilibru? (Aria patrulaterului este formată dintr-o materie omogenă).

● **130.** În triunghiul dreptunghic ABC ($A=90°$) se consideră un punct M pe ipotenuza BC astfel ca $BM<\frac{BC}{2}$. Perpendiculara în M pe BC intersectează semicercul de diametru BC în P, cateta AB în N și prelungirea catetei AC în Q. Fie H mijlocul lui AQ. Se construiește cercul O de diametru QN. Tangenta în A la cercul O intersectează ipotenuza BC în D. Din punctul M se duce tangenta MT la cercul O. Dacă $BC=5\sqrt{5}$, $AB=5\sqrt{3}$, $OH=\sqrt{3}$ se cere

1° Să se arate că $\widehat{DAC}=\widehat{DCA}$;
2° Să se calculeze aria triunghiului ADC;
3° Să se calculeze aria patrulaterului $OHAN$;
4° Să se calculeze lungimea segmentului MT.

● **131.** În afara unui cerc de rază R se duc patru cercuri de aceeași rază, tangente între ele și tangente la cerc. Să se afle raza acestor cercuri.

● **132.** Într-un trapez isoscel $ABCD$, bazele sînt $AB=a$ și $CD=b$. Să se calculeze aria trapezului știind că dreapta CE, unde E este mijlocul laturii AD, este perpendiculară pe BC.

● **133*** Într-un trapez cu bazele B și b, prin punctul de intersecție al diagonalelor se duce o dreaptă paralelă cu bazele și care împarte trapezul în două părți de arii S_1, S_2. Se cere să se exprime raportul acestor două arii cu ajutorul lungimilor celor două baze.

● **134.** Se dă trapezul $ABCD$, cu bazele a și b. Pe prelungirea bazei mici se ia un punct M situat la distanța x de C și fie S intersecția dreptei AM cu BC. Să se afle poziția punctului M așa ca aria triunghiului ABS să fie jumătate din aria trapezului.

● **135*** Ariile triunghiurilor mărginite de segmentele de pe diagonalele unui trapez și baze sînt egale cu S_1 și S_2. Să se afle aria trapezului.

● **136.** O dreaptă paralelă la bazele unui trapez îl împarte în două părți a căror arii sînt în raportul 7/2 (socotind de la baza mare). Să se calculeze lungimea segmentului, din această dreaptă, interior trapezului știind că bazele sînt egale cu 5 și 3.

● **137.** Să se arate că un patrulater circumscris unui cerc este inscriptibil, dacă segmentele care unesc punctele de tangență sînt perpendiculare.

● **138*** Într-un pătrat de latură a, perechile de vîrfuri opuse sînt vîrfurile a două romburi egale. Să se afle aria suprafeței comune a celor două romburi, știind că aria fiecăreia este jumătate din aria pătratului.

● **139.** Fiind dat un trapez cu bazele a și b, să se calculeze lungimea segmentului paralel cu bazele, care trece prin punctul de întîlnire al laturilor neparalele și care este mărginit de prelungirea diagonalelor.

● **140.** Lungimile bazelor unui trapez sînt egale cu a și b. Să se calculeze lungimea segmentului paralel cu bazele care împarte trapezul în alte două trapeze de arii egale.

● **141.** Într-un pătrat cu latura a, pe două laturi opuse și în spre interior se construiesc două triunghiuri echilaterale. Se cer unghiurile, laturile și aria patrulaterului format prin intersecția laturilor neparalele ale celor două triunghiuri.

● **142.** Într-un trapez isoscel se cunosc lungimile bazelor a, b și lungimea c a laturilor egale. Se cere:

1° aria trapezului;

2° unghiul unei diagonale cu baza;

3° raza cercului circumscris trapezului.

● **143.** Într-un cerc de rază R se consideră înscris trapezul isoscel $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Știind că arc $AB = 120°$ și că arc $DC = 60°$, se cere:

1° Perimetrul și aria trapezului,

2° Lungimea diagonalelor și distanța de la intersecția diagonalelor pînă la punctul de întîlnire al laturilor neparalele.

● **144**** Fie un pătrat de centru O și în care vîrfurile opuse sînt A, A' și B, B'.

1° P fiind un punct oarecare din plan, să se arate că cercurile care trec respectiv prin punctele A, A', P și B, B', P se taie într-un al doilea punct P', situat pe OP.

2° Să se afle locul lui P' cînd P descrie perimetrul pătratului. În care regiune a planului trebuie să se afle P, pentru ca P' să fie interior pătratului.

3° Dacă P descrie paralela Ox la AB', cele două cercuri de la 1° au aceeași rază y. Să se reprezinte grafic variația lui y în funcție de $OP = x$.

● **145*** Un cerc este împărțit în nouă arce egale. Punctele de diviziune, unite consecutiv determină un poligon convex regulat de perimetru P; unite din două în două, ele determină un poligon stelat, a cărui laturi delimitează un nou poligon regulat convex de perimetru P_1; unite din patru în patru, ele determină un al doilea poligon stelat ale cărui laturi delimitează un al treilea poligon regulat convex de perimetru P_2. Să se demonstreze că

$$P = P_1 + P_2.$$

● **146.** Se dau într-un plan două axe perpendiculare Ox și Oy și un punct M de coordonate pozitive care se proiectează ortogonal în P pe Ox. Perpendiculara în O pe OM intersectează MP în L iar perpendiculara în L pe OL intersectează Ox în Q. Unim M cu Q.

1° Să se stabilească relațiile:

$$OL^2=OM\cdot LQ;\ OM^2+LQ^2=OL^2+MQ^2.$$

2° Considerăm cele patru triunghiuri PMO, POL, PLQ și PQM. Să se arate că două dintre ele au aceeași arie care este medie proporțională între ariile celorlalte două.

● **147*** Se consideră un trapez isoscel $ABCD$, în care vîrfurile A și B ale bazei AB sînt fixe, iar C, D se deplasează într-un plan ce trece prin AB și așa ca să avem $CD=BC+AD$.

1° Se cere locul geometric al punctelor C și D.

2° Se consideră acel trapez pentru care unghiul ACB este drept și se cere să se calculeze baza CD în funcție de cealaltă bază. Să se dea o construcție geometrică.

3° Bisectoarea unghiului BCD întîlnește într-un punct M, perpendiculara în B la BC. Să se afle locul geometric al punctului M.

● **148*** Într-un heptagon regulat $ABCDEFG$, avem

$$\frac{1}{AB}=\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}.$$

● **149*** Într-un patrulater convex $ABCD$ se presupune că două laturi opuse AB și CD sînt egale și că diagonalele AC, BD sînt de asemenea egale. Fie P mijlocul lui AD, Q mijlocul lui BC și J punctul de întîlnire al diagonalelor.

1° Să se arate că punctele P, J, Q sînt pe aceeași dreaptă perpendiculară pe laturile AD și BC.

2° Presupunem că $AB=CD=a$, $AC=BD=b$, $(a<b)$. Fixînd punctele A, B se face să varieze punctele C, D. Să se afle locul geometric al punctelor P și Q. Să se arate că produsul $AD\cdot BC$ are o valoare constantă care trebuie exprimată în funcție de a și b. În ce caz perimetrul figurii este cel mai mic posibil?

● **150.** La capetele unui segment AB se duc, de aceeași parte a segmentului, două paralele pe care se iau punctele C și D. Din mijlocul E al segmentului AB, se duce perpendiculara EM pe CD. Se cere locul geometric al punctului M cînd lungimile segmentelor AC și BD variază așa ca aria trapezului $ACDB$ să fie constantă.

● **151.** Se consideră toate paralelogramele $ABCD$, de perimetru constant, care au vîrful A fix și laturile AB, AD de-a lungul dreptelor fixe Ax, Ay. Să se afle locul geometric al vîrfului C.

● **152*** Fie mulțimea de patru puncte A, B, C, D și fie M, N, P, Q, R, S, mijloacele segmentelor AB, BC, CD, DA, AC și BD.

1° Să se studieze patrulaterul $MNPQ$; să se deducă de aici că segmentele MP, NQ, RS au același mijloc I.

2° Considerînd că D este ortocentrul triunghiului ABC, ce devine patrulaterul $MNPQ$? Ce rezultă despre segmentele MP, NQ și RS și care este locul geometric al punctelor M, N, P, Q, R și S?

● **153.** Un trapez isoscel are înălțimea a, baza mică $2a$ și baza mare $4a$. Pe laturile neparalele se construiesc, în afară, semicercuri și se duce tangența comună MN (M și N fiind punctele de tangență). Să se calculeze aria trapezului $MNCD$.

● **154.** Fie trapezul $ABCD$ cu bazele AB și CD.

1° Să se arate că diagonala AC este bisectoarea unghiului A dacă, și numai dacă, $DA=DC$.

2° Considerînd trapezul isoscel, cu baza mică DC egală cu laturile neparalele BC și AD, și diagonalele respectiv perpendiculare pe BC și AD, să se calculeze unghiurile trapezului.

● **155.** Se consideră cercul cu centrul în O și de rază R și două drepte, din planul său. Să cere:

1° Locul geometric al punctelor din plan egal depărtate de cercul dat cu distanța d. Discuție.

2° Punctele din plan aflate la distanța d de cerc și egal depărtate de cele două drepte. Discuție.

● **156.** Patrulaterul $ABCD$ are diagonalele sale AC și BD perpendiculare în punctul I și este înscris în cercul (O). Să se arate că patrulaterul format din tangentele la cercul (O) în punctele A, B, C, D este inscriptibil.

● **157.** Se dă trapezul $ABCD$ $(AD \| BC)$. Luăm pe CD un punct variabil M și construim prin C și D paralele respectiv la MA și MB. Să se afle locul geometric al intersecției acestor drepte.

● **158.** Fiind dat triunghiul ABC $(A=90°)$ cu înălțimea AD, notăm cu C' conjugatul armonic al punctului C în raport cu D și B. Să se arate că distanța de la punctul C' la latura AB este medie geometrică între segmentele $C'B, C'D$.

● **159*** Să se afle locul geometric al centrelor cercurilor care se văd dintr-un punct fix A sub un unghi 2α și care taie o dreaptă fixă sub un unghi β.

● **160**** Se consideră triunghiul ABC și se notează cu D, E, F punctele unde cercul înscris, cu centrul în I, este tangent laturilor BC, CA și AB. Acest triunghi variază în așa fel încît vîrfurile B și C rămîn fixe și lungimea CE constantă.

1° Să se demonstreze că dreapta EF trece printr-un punct fix P.

2° Locul geometric descris de punctul A este, în general, o hiperbolă, pentru care se cer focarele și asimptotele.

3° Locul geometric descris de punctul H, intersecția dreptei PI cu dreapta AD.

● **161*** O dreaptă AB întîlnește cercurile O_1 și O_2 în punctele A_1, B_1 și A_2, B_2. O altă dreaptă CD întîlnește aceleași cercuri în punctele C_1, D_1 și C_2, D_2. Să se arate că secantele A_1D_1 și B_1C_1, ale cercului O_1, întîlnesc secantele A_2D_2 și B_2C_2, ale cercului O_2, în patru puncte M, N, P, Q, care sînt așezate pe același cerc.

● **162*** În cercul cu centrul în punctul O și de rază R se consideră înscris patrulaterul $ABCD$, care are latura AB fixă iar CD de lungime constantă. Se cere:

1° Locul geometric descris de intersecția diagonalelor.

2° Locul geometric descris de punctul de intersecție al dreptelor ce unesc mijloacele laturilor opuse.

● **163*** Într-un plan se consideră triunghiul oarecare ABC și un punct P, tot oarecare. Se notează cu A', B', C' simetricele punctului P în raport cu mijloacele laturilor BC, CA și AB, pe care le presupunem în punctele α, β, γ.

1° Să se demonstreze că dreptele AA', BB' și CC' sînt concurente într-un punct M.

2° Să se arate că dreapta PM trece printr-un punct fix, cînd P variază.

3° Să se afle locul geometric descris de punctul M cînd P descrie o dreaptă fixă.

● **164*** În triunghiul ABC, lungimea laturii BC este egală cu 3α; înălțimea care pleacă din vîrful A este egală cu 2α iar piciorul ei este A', așezat la o treime din BC, începînd din B.

1° Să se arate că ortocentrul H al triunghiului se găsește la mijlocul lui AA'.

2° Să se afle raportul în care piciorul înălțimii ce pleacă din vîrful B, împarte latura AC și raportul în care ortocentrul H, împarte această înălțime BB'

3° Să se determine poziția centrului O al cercului circumscris triunghiului ABC.

4° Să se calculeze puterea punctului H față de cercul circumscris triunghiului ABC.

● **165*** Se dă un cerc de centru O și în interiorul lui, punctul I și se consideră toate triunghiurile ABC înscrise în cerc pentru care I este intersecția bisectoarelor interioare și se cere:

1° Locul geometric descris de centrele celor trei cercuri care trec prin două din vîrfurile triunghiului ABC și prin punctul I.

2° Locul geometric descris de vîrfurile triunghiului format de centrele cercurilor exînscrise în triunghiul ABC.

● **166**** Se consideră unghiul fix xOy și în planul lui punctul fix P, prin care se duce o secantă variabilă, PAB, ce întîlnește pe Ox în A și pe Oy în B. Să se construiască secanta pentru care produsul $PA \cdot PB$ este minim în valoare absolută.

● **167*** Să se arate că într-un triunghi ABC care are ortocentrul în punctul H și centrul cercului circumscris în O, avem relația

$$A\omega^2+B\omega^2+C\omega^2+H\omega^2=3R^2,$$

unde ω este mijlocul segmentului OH, iar R este raza cercului circumscris.

● **168*** Locul centrelor cercurilor văzute din două puncte date A și B sub unghiurile date 2α și 2β.

● **169.** Să se construiască un triunghi cînd se cunosc:

1° O latură și medianele ce pleacă din extremitățile ei;

2° O latură, înălțimea și mediana corespunzătoare ei;

3° O latură și cele două înălțimi ce pleacă din extremitățile ei.

● **170*** Să se afle locul centrelor cercurilor care trec printr-un punct dat O și sînt văzute dintr-un punct fix P sub un unghi dat 2α.

● **171*** 1° Un unghi drept al cărui vîrf A este fix, se rotește în jurul acestui vîrf într-un plan în care sînt duse două axe rectangulare (fixe) Ox și Oy. Laturile mobile ale unghiului întîlnesc axa Ox și axa Oy respectiv în B și C. Să se afle locul geometric al mijlocului I, al segmentului BC, și locul geometric descris de proiecția ortogonală, H, a lui A pe BC.

2° Un unghi drept cu vîrful A_1, fix, se rotește în jurul acestui vîrf într-un plan în care este trasat un cerc fix de centru O_1. Cercul O_1 este întîlnit de laturile mobile ale unghiului drept în B_1 și C_1. Să se afle locul geometric al punctului I_1, mijlocul lui B_1C_1 și cel al proiecției ortogonale H_1 a lui A_1 pe B_1C_1.

● **172**** Să se construiască două cercuri egale, tangente între ele și unul tangent în punctul fix A la dreapta fixă Sx iar celălalt tangent în punctul fix B la dreapta fixă Sy.

● **173.** Într-un triunghi dreptunghic ABC, se dă cateta b și raza r a cercului înscris triunghiului. Se cere să se afle ipotenuza a și cealaltă catetă c.

● **174.** Să se construiască tangenta comună la două cercuri date.

● **175*** Să se construiască un cerc care:

1° trece prin trei puncte date,

2° trece prin două puncte și este tangent la o dreaptă dată,

3° trece printr-un punct și este tangent la două drepte date.

● **176*** Fiind date două drepte Δ_1, Δ_2, să se dea o construcție geometrică a centrului unui arc de cerc de rază R, care să taie dreptele sub unghiuri date α, β. Caz particular $\alpha=\beta=0$.

● **177**** Fiind date două drepte Δ_1, Δ_2 să se determine două arce de cerc tangente exterior AMB, tangentele în A și B făcînd cu Δ_1, respectiv Δ_2, unghiurile α și β. Cunoscînd punctul A și razele R_1, R_2 ale celor două arce, să se dea o construcție geometrică pentru centrele celor două cercuri și pentru punctul B. Aceeași problemă pentru cazul cînd arcele sînt tangente interior. Condiții de posibilitate ale problemelor.

● **178.** Se dă un cerc cu raza R și diametrul AB. Într-un punct M al cercului se duce tangenta MT, punctul T fiind pe prelungirea diametrului AB. Se cere să se determine unghiul $x=\sphericalangle BAM$, astfel încît să avem $MT=k\cdot MA$, k fiind o constantă pozitivă dată. Discuție. Exemplu numeric: $k=1$.

● **179**** Pe un cerc cu diametrul AB, raza R și centrul O, se consideră punctul variabil C. Notînd cu D și E centrele cercurilor AOC și OBC, se duc dreptele AD și BE care se taie în M.

1° Să se afle locul geometric al punctului M, cînd punctul C parcurge cercul cu centrul în O;

2° Să se arate că punctele O, C, D, E, M se află pe un cerc.

Capitolul II

GEOMETRIE ÎN SPAȚIU

● **1.** Fie dreptele necoplanare D și Δ care intersectează un plan P respectiv în a și α și punctele variabile $A \in D$ și $B \in \Delta$. Fie M mijlocul segmentului AB. Să se studieze mulțimea punctelor M dacă AB rămîne paralelă la planul P.

● **2*** Două triunghiuri din spațiu ABC, $A'B'C'$ sînt astfel încît BC și $B'C'$, CA și $C'A'$, AB și $A'B'$ se intersectează.

1° Să se arate că dreptele AA', BB', CC' sînt concurente, sau paralele.

2° Cele trei puncte de intersecție α, β, γ ale laturilor BC, $B'C'$; CA, $C'A'$; AB, $A'B'$ sînt coliniare.

● **3*** Se consideră două plane perpendiculare care se taie după o dreaptă SC și un plan care le intersectează după două drepte SA și SB, care fac cu dreapta SC unghiurile α și β. Se cere cosinusul unghiului $\widehat{ASB}$ și tangenta unghiului φ pe care-l face planul ASB cu SC.

● **4.** Se consideră două drepte, (D_1) și (D_2), nesituate în același plan, care fac un unghi de 30° și care au cea mai scurtă distanță între ele $A_1A_2 = d$.

Fie M_1 punctul curent pe (D_1) aflat la distanța x de A_1. Se coboară perpendiculara M_1M_2 pe (D_2).

1° Să se calculeze, în funcție de x și de datele cunoscute, distanțele A_2M_2 și M_1M_2.

2° Să se calculeze x așa fel ca patrulaterul $A_1A_2M_2M_1$ să aibă perimetrul egal cu $3d$. Să se precizeze numărul soluțiilor.

● **5.** Catetele unui triunghi dreptunghic sînt respectiv de 7 cm și 24 cm. Să se determine distanța de la vîrful unghiului drept la planul care trece prin ipotenuză și face cu planul triunghiului un unghi de 30°.

● **6.** Două triunghiuri isoscele au baza comună de 16 cm iar planele lor formează un unghi de 60°. Una din laturile egale ale unui triunghi este de 17 cm iar laturile egale ale celuilalt triunghi sînt perpendiculare. Să se afle distanța dintre vîrfuri.

● **7.** Se dă un plan (P) și un punct A aflat la distanța h de acest plan, care se proiectează în H pe planul (P). Fie B un punct al planului (P) aflat la distanța d de H.

1° Fie I proiecția ortogonală a lui A pe o dreaptă variabilă din planul (P), care trece prin B. Să se arate că punctul I descrie cercul (C) de diametru HB și să se calculeze volumul conului (Q) cu vîrful A și baza (C).

2° Să se afle locul geometric (S) al proiecției ortogonale a lui A pe un plan variabil care trece prin B. Se cere volumul solidului (T) interior lui (S) și exterior conului (Q) limitat la bază.

3° Se consideră volumul solidului (W) cuprins între sfera cu centrul în B și care trece prin A și conul de rotație, limitat la vîrful și baza lui, vîrful în B și avînd ca bază cercul cu centrul în H și care trece prin A. Să se determine raportul $\frac{h}{d}=x$ așa fel ca suma volumelor lui (W) și a sferei de centru B, ce trece prin H, să fie de 8 ori volumul lui (T).

● **8*** Fie în spațiu patru puncte $ABCD$ și se notează cu E, F, G, H, I, K mijloacele segmentelor AB, AC, AD, BC, BD, CD. Se presupune că $AB=CD$ și în plus că EK este perpendiculara comună la dreptele AB și CD.

1° Să se arate că IF este perpendiculara comună la AC și DB. Să se afle perpendiculara comună la AD și BC.

2° Notînd cu O mijlocul lui EK să se examineze triedrul $OEFG$.

3° Cunoscînd lungimea $AB=2b$, lungimea $EK=2e$ și unghiul ascuțit β, făcut de AB cu CD, să se calculeze $AC=2c$, $AD=2d$, $FI=2f$, $GH=2g$ ca și unghiul ascuțit γ, făcut de AC cu BD, și unghiul ascuțit δ făcut de AD cu BC (presupunem $c>f>g$).

4° Cunoscînd numai lungimile b și c, să se determine unghiul β așa fel ca piramida $ABCD$ să aibă un volum dat V. Discuție.

● **9.** Se dă triunghiul isoscel ABC $(AB=AC)$ de bază $BC=2a$ și de înălțime $AO=a$. În B și C se duc semidreptele Bx și Cy perpendiculare pe planul ABC. Pe Bx luăm punctul M și pe Cy punctul N. Considerăm $BM=x$ și $CN=y$.

1° Să se calculeze MO, NO și MN în funcție de a, x și y și să se găsească relația ce trebuie să existe între a, x și y astfel ca triunghiul MON să fie dreptunghic în O. Să se arate că în acest caz avem $MN=x+y$.

2° Fie I proiecția lui O pe MN. Să se calculeze MI în funcție de x, NI în funcție de y și OI în funcție de a.

● **10.** Într-un plan P se duce segmentul $OA=a$ și pe perpendiculara în O pe planul P luăm segmentul $OB=a$.

În planul P, ducem din A o semidreaptă AD care face cu AO un unghi ascuțit $\widehat{OAD}=\alpha$; ducem OC perpendiculară pe AD și notăm cu C piciorul acestei perpendiculare. Notăm apoi cu β unghiul $\widehat{OCB}$.

1° Să se găsească relația care leagă unghiurile α și β.

2° Să se calculeze α dacă $\beta=\alpha$.

3° α și β fiind oarecare, să se exprime în funcție de α și β aria triunghiului ABC. Să se calculeze β dacă această arie este egală cu $\frac{1}{2}k^2a^2$.

● **11.** Într-un plan P se consideră un romb $ABCD$ de latură a și a cărui diagonală mică este $BD=b$. Fie $O=AC\cap BD$.

1° Să se calculeze diagonala AC, a fiind dat. Care este maximul lui b? Să se calculeze aria rombului.

2° Într-un punct H al segmentului AO ridicăm o perpendiculară pe planul P pe care luăm un punct A'. Să se calculeze $AH=x$ și $HA'=y$ astfel ca $AA'=a$ și ca triunghiul $BA'D$ să fie echilateral.

3° Se construiește paralelipipedul Q având $ABCD$ ca bază și AA' ca muchie laterală. Să se arate că toate fețele lui Q sînt romburi egale.

4° Să se calculeze volumul V al paralelipipedului Q.

● **12.** Într-un tetraedru $ABA'B'$ se presupune că unghiurile $\widehat{BAA'}$ și $\widehat{ABB'}$ sînt drepte și că planele BAA' și ABB' sînt perpendiculare. Se notează cu α și β unghiurile $\widehat{BAB'}$ și $\widehat{ABA'}$.

1° Presupunînd cunoscute unghiurile α și β și lungimea $AB=l$, să se calculeze volumul tetraedrului și lungimea muchiei $A'B'=l'$.

2° Cunoscînd lungimea muchiei $AB=l$, suma unghiurilor $\alpha+\beta=s$ și volumul tetraedrului $V=\frac{Kl^3}{6}$, să se calculeze α, β și l'. Dacă l și s se presupun cunoscute, ce condiție trebuie să îndeplinească K, pentru ca problema să fie posibilă?

3° Cînd $s=\frac{\pi}{3}$, să se dea expresia lui K în funcție numai de $x=\operatorname{tg}\alpha$. Să se studieze și să se reprezinte grafic variația lui K în funcție de x.

● **13.** Fie $OABC$ un triedru cu vîrful în O și ale cărui fețe au unghiuri de 60° iar pe muchia OA se ia un punct P așa fel ca $OP=a$.

Să se determine pe muchia OB un punct Q și pe muchia OC un punct R așa fel ca triunghiul PQR să fie dreptunghic în P și raza cercului circumscris triunghiului OQR să fie egală cu b. Se va lua $OQ=x$; $OR=y$.

● **14*** În planul (P) se dau două drepte indefinite BX' și BY, care fac între ele un unghi egal cu $\frac{\pi}{4}$. În punctul B se ridică perpendiculara pe planul (P) și se ia un punct oarecare A pe ea, prin care se duce paralela AX la BX'.

1° Să se arate că prin orice punct C de pe dreapta AX se poate duce o dreaptă CD și numai una, care taie pe BY sub un unghi drept, într-un punct D. Se notează cu C' proiecția ortogonală a lui C pe planul (P). Ce fel de triunghi este triunghiul $BC'D$?

2° Să se determine C așa fel ca unghiul ascuțit al dreptelor AB și CD să fie egal cu $\frac{\pi}{4}$. Sînt două soluții, C_1 și C_2, la care corespund punctele D_1 și D_2. Care este unghiul dreptelor C_1D_1 și C_2D_2?

3° Să se afle centrul sferei care trece prin A, B, C, D. Care este locul geometric descris de centrul sferei cînd punctul C descrie dreapta AX?

4° Să se calculeze muchiile și volumul tetraedrului $ABCD$ în funcție de lungimile $AB=a$ și $AC=x$. Să se deducă distanța de la punctul B pînă la planul ACD. Să se determine punctul C așa fel ca această distanță să aibă o lungime dinainte dată, l. Discuție.

● **15*** Fie $SABC$ un triedru cu unghiurile $\sphericalangle ASB=x$, $\sphericalangle ASC=y$, $\sphericalangle BSC=\alpha$ ascuțite. Se presupune că punctele A, B, C sînt luate pe muchii așa ca ABC să fie perpendicular pe muchia SA.

1° Evaluînd pe BC^2 în două moduri diferite, să se arate că relația $\cos x \cos y=\cos \alpha$ este condiția necesară și suficientă pentru ca diedrul cu muchia SA să fie drept.

2° Se dă unghiul ascuțit α și se cere să se determine unghiurile ascuțite x și y așa ca $\frac{\sin x}{\sin y}$ să aibă o valoare dată λ și ca diedrul SA să fie drept. Să se arate că există totdeauna un triedru $SABC$, care satisface aceste condiții. Există mai multe? Aplicație: $\lambda^2=2$, $\operatorname{ctg}^2\alpha=0{,}6$.

3° Se presupune că diedrul SA este drept și se cere să se calculeze ariile triunghiurilor ABC, SBC în funcție de lungimea SA și de unghiurile x, y, α. Să se deducă formula $\sin x \sin y=\sin \alpha \sin \varphi$, φ fiind unghiul muchiei SA cu planul SBC.

● **16.** Se dă un cerc cu diametrul $AB=2R$. Pe o perpendiculară în A la planul cercului se ia $AS=2R$. Dacă M este un punct de pe cerc, se consideră tetraedrul $SABM$.

1° Să se arate că cele patru fețe sînt triunghiuri dreptunghice. Să se afle centrul și raza sferei care trece prin cele patru vîrfuri.

2° Să se calculeze distanța de la punctul A la planul feței SBM în funcție de măsura x a unghiului $\widehat{BAM}$. Să se determine x astfel ca această distanță să fie egală cu un număr dat d.

● **17.** O prismă triunghiulară se intersectează cu un plan și secțiunea obținută este un triunghi echilateral. Să se calculeze latura acestui triunghi echilateral în funcție de cele trei laturi $a>b>c$ ale secțiunii drepte.

● **18.** O prismă dreaptă are ca bază un triunghi echilateral de latură a. Prin una din laturile bazei se duce un plan care face unghiul φ cu baza. Știind că volumul piramidei formate este v, să se afle aria secțiunii dintre planul dus și prismă.

● **19.** Se notează cu A și B două vîrfuri opuse ale unui cub, cu muchia a, ele fiind luate ca vîrfurile a două conuri de rotație, în jurul diagonalei cubului care le unește și admițînd ca generatoare cele trei muchii care pleacă din aceste vîrfuri. Notăm cu M centrul cercului care reprezintă baza comună a celor două conuri.

1° Să se calculeze volumul solidului format de cele două conuri.

2° Să se calculeze, în funcție de muchia a, raza sferei care are același volum cu cele două conuri.

● **20.** Fie $ABCD$ un tetraedru regulat, de muchie a. Pe DA și DB, în sensul de la D spre A și de la D spre B, se iau lungimile $DE=DF=x$ și pe CA și CB, în sensul de la C spre A și de la C spre B, lungimile $CG=CH=x$ și se presupune $0<x<a$.

1° Să se demonstreze că patrulaterul $EFGH$ este un dreptunghi. Să se calculeze laturile lui în funcție de x și a.

2° Poliedrul $DEFCGH$ este un trunchi de prismă triunghiulară. Să se calculeze aria suprafeței laterale și totale a poliedrului.

3° Să se determine x așa fel ca aria laterală să fie egală cu Ka^2, unde K este un număr pozitiv dat.

● **21.** Într-un tetraedru $SABC$, muchiile sînt egale între ele $SA=SB=SC=a$ și fețele laterale sînt egale între ele, unghiul lor în S, notat cu x, este variabil.

1° Să se arate că perpendiculara comună DE la două muchii opuse SA și BC, trece prin mijlocul lui BC.

2° Dacă SH este înălțimea tetraedrului dusă din S, să se exprime în funcție de x, funcția $y=SH^2+DE^2$. Să se studieze variația lui y.

● **22.** Se consideră o piramidă de vîrf A avînd ca bază un trapez $BCQP$, a cărui unghiuri B și C sînt drepte. Fața ABC este un triunghi isoscel a cărui plan este perpendicular pe planul bazei.

Se dau: $AB=AC=a$ și înălțimea $AH=\frac{a}{2}$ a triunghiului ABC și se notează $BP=x$, $CQ=y$. Se cere:

1° Să se calculeze BC, AP, AQ și PQ în funcție de a, x, y precum și volumul piramidei.

2° Considerînd că fața APQ este dreptunghică în A, să se arate că $2xy=a^2$. Să se calculeze x și y în cazul cînd $V=m\cdot\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$, m fiind un număr pozitiv dat. Discuție.

3° Să se calculeze V cînd m ia valoarea minimă admisă. Ce se poate spune în acest caz despre baza $BCQP$ a piramidei?

● **23.** Fie în planul P triunghiul isoscel ABC ($AB=AC=a$, și măsura unghiului $BAC=120°$). Fie segmentele BM și CN perpendiculare pe P și de aceeași parte față de P. Punînd $BM=x$ și $CN=y$, să se calculeze MN în funcție de a, x și y. Să se arate că $\widehat{MAN}=90°\Leftrightarrow 2xy=a^2$.

● **24.** Prelungim, dincolo de vîrf, muchiile unei piramide și tăiem aceste prelungiri printr-un plan paralel cu baza. Să se exprime suma volumelor celor două piramide, fiind date cele două baze B, B' și distanța h dintre planele lor.

● **25.** Se consideră un paralelipiped dreptunghic P, cu laturile $2a$, $2b$, $2c$. Se cere:

1°. Aria sferei S, circumscrisă paralelipipedului P;

2°. Suma ariilor celor șase cercuri determinate pe sferă de fețele paralelipipedului;

3° Suma ariilor celor șase calote sferice mai mici fiecare decît o emisferă, detașate din sfera S de aceleași fețe.

● **26.** Se dă o piramidă regulată $SABC$ cu vîrful S și fie M mijlocul lui AB. Sfera de centru S și de rază $SA+AM$ întîlnește înălțimea SH a piramidei în P și P'.

1° Să se demonstreze că

$$PP'^2=MP^2+MP'^2+MP\cdot MP'\cdot\sqrt{3}.$$

2° Să se calculeze valoarea unghiului $\widehat{PMP'}$.

● **27.** Se dă piramida $SABCD$ unde baza $ABCD$ este un pătrat de latură a iar muchia $SA=h$ este perpendiculară pe bază.

1° Să se calculeze în funcție de a și h aria laterală a piramidei. Să se determine h ca raportul dintre aria laterală și aria bazei să fie egal cu numărul K. Discuție,

2° Ducem din A perpendicularele AE și AF respectiv pe SB, SD. Să se arate că planul EAF este perpendicular pe muchia SC. Notăm cu H punctul de intersecție al planului cu SC. Punînd $h=a\operatorname{tg}\alpha$ să se calculeze în funcție de a și α laturile patrulaterului $AEHF$ și cele două diagonale AH și EF.

● **28.** Se consideră paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$, de înălțime $DD'=h$, dimensiunile bazei fiind $AD=a$, $AB=b$.

1° Prin DD' ducem două plane care taie fețele laterale ale paralelipipedului după dreptele MM', NN' astfel ca solidul să fie împărțit în trei părți echivalente.

2° Să se calculeze raportul volumelor solidelor $MBNM'B'N'$ și $MDNM'D'N'$.

3° Să se găsească relația ce leagă a și b pentru ca diedrul de muchie NN' și ale cărei fețe trec prin MM' și DD' să fie drept.

4° Presupunînd această condiție îndeplinită, să se calculeze, în funcție de a și h, volumul solidului generat de dreptunghiul $MM'NN'$ prin rotirea sa în jurul lui DD'. Aplicație: $a=3$ m, $h=0{,}30$ m.

● **29.** Se dă prisma triunghiulară dreaptă $ABCA_1B_1C_1$. Pe muchia AA_1 se ia un punct A_0 astfel ca: $m\cdot AA_0=n\cdot A_0A_1$.

Notăm $V=V_{ABCA_1B_1C_1}$, $V_1=V_{ABCA_0}$, $V_2=V_{A_1B_1C_1A_0}$.

Să se arate că avem relațiile:

1° a) $3(V_1+V_2)=V$, b) $3n(m+n)\cdot V_2=3m(m+n)\cdot V_1=mn\cdot V$

2° $$V_{BCC_1B_1A_0A_1}=\frac{3m+2n}{3(m+n)}\cdot V.$$

● **30.** Să se ducă într-o prismă o secțiune paralelă cu bazele, astfel ca piramida avînd vîrful într-un punct al bazei superioare, baza în planul bazei inferioare și muchiile laterale trecînd prin vîrfurile secțiunii, să fie echivalentă cu prisma.

● **31.** Se dau în spațiu două drepte perpendiculare BX, CY avînd perpendiculară comună $BC=2a$. Luăm pe BX o lungime $BA=x$ și pe CY o lungime $CD=y$.

1° Să se stabilească o relația de legătură între x și y dacă $AD=x+y$.

2° Să se demonstreze că, avînd această condiție, volumul tetraedrului $ABCD$ are o valoare constantă.

3° Să se calculeze, cu aceeași condiție, minimul sumei pătratelor ariilor fețelor tetraedrului și valorile lui x și y corespunzătoare acestui minim.

● **32.** Se consideră o prismă dreaptă (P), care are ca bază pătratul $ABCD$ și muchiile laterale AA', BB', CC' și DD' nedefinite. Pe prelungirea laturii DA se ia segmentul $AI=a$ și pe prelungirea lui CB se ia segmentul $BJ=b$. Un plan oarecare ce trece pe IJ intersectează muchiile în punctele A_1, B_1, C_1, D_1.

1° Să se demonstreze că patrulaterul $A_1B_1C_1D_1$ este un paralelogram.

2° Să se arate că $\frac{AA_1}{a}=\frac{BB_1}{b}$.

3° Notînd cu k valoarea comună a celor două rapoarte și luînd ca unitate de măsură pentru lungimi latura pătratului de bază, să se calculeze în funcție de a, b și k laturile și diagonalele paralelogramului $A_1B_1C_1D_1$.

● **33**** Într-un tetraedru $ABCD$, muchia $AB=2l$; muchia AD este perpendiculară pe AB și $AD=a$; muchia BC este perpendiculară pe AB și $BC=b$, unghiul lui BC cu AD este egal cu α.

1° Să se calculeze volumul acestui tetraedru.

2° Să se determine în mărime și poziție perpendiculara comună a muchiilor AB și CD.

3° Să se stabilească relația care trebuie să existe între elementele date l, a, b și α pentru ca sfera de diametru AB să fie tangentă la CD.

4° În această ipoteză și presupunînd $\alpha=90°$, să se afle lungimea perpendicularei comune lui AC și BD.

● **34*** Într-un plan P se dă un triunghi înscris într-un cerc de centru O și de rază R. Pe perpendiculara pe planul P, dusă prin O, luăm un punct oarecare S.

1° Să se arate că segmentele SA, SB, SC sînt egale și fac același unghi x cu planul P. Să se calculeze unghiurile $\widehat{BSC}$, $\widehat{CSA}$, $\widehat{ASB}$ în funcție de x și de unghiurile A, B, C ale triunghiului. Să se determine x astfel ca unghiul $\sphericalangle BSC$ să fie drept.

2° Cum trebuie să fie triunghiul ABC astfel ca

$$\widehat{BSC}=\widehat{CSA}=\widehat{ASB}$$

3° Această condiție fiind îndeplinită, să se calculeze OS în funcție de R:

a) în cazul cînd cele trei unghiuri sînt drepte;

b) cînd sînt egale cu 60°.

Să se deducă o proprietate a tetraedrului regulat.

● **35*** Într-un cerc de rază R se consideră înscris trapezul isoscel $ABCD$ ($AB \parallel CD$) și se cunosc arcele $\widehat{AB}=120°$, $\widehat{DC}=60°$. Se cere:

1° Perimetrul și aria trapezului.

2° Lungimea diagonalelor și distanța de la intersecția diagonalelor pînă la punctul de întîlnire al laturilor neparalele.

3° Dacă trapezul este baza unei prisme drepte, cu înălțimea cît diagonala trapezului, să se calculeze aria și volumul sferei circumscrisă prismei.

● **36.** O piramidă dreaptă are baza un pătrat de latură a. Fețele ei laterale fac unghiul α cu baza. Să se afle aria intersecției piramidei cu un plan ce trece printr-o latură a bazei și face cu aceasta unghiul β.

● **37.** Baza unei piramide drepte este un dreptunghi. Lungimea muchiilor ce pornesc din vîrf este egală cu m. Două din fețele laterale au unghiul α la bază, iar celelalte unghiul β la bază. Să se calculeze volumul piramidei.

● **38*** Două paralelograme, nu neapărat situate în același plan, invariabile în mărime, $OA_1B_1C_1$ și $OA_2B_2C_2$, au vîrful O comun. Mijloacele segmentelor OA_1, OA_2, B_1C_2, B_2C_1 sînt respectiv M_1, M_2, N_1, N_2. Să se arate că segmentele M_1N_1 și M_2N_2 rămîn totdeauna paralele și egale, oricare ar fi pozițiile respective ale celor două paralelograme.

● **39.** Se dă un tetraedru regulat $ABCD$ care are ca fețe patru triunghiuri echilaterale de latură a. Pe muchiile CA și DA se iau segmentele $CE=DF=x$ și pe muchiile CB și DB se iau segmentele $CG=DH=y$.

1° Dacă $x>y$, să se calculeze laturile trapezului isoscel $EGHF$ în funcție de a, x și y. Să se determine x și y astfel ca pătratul înălțimii acestui trapez să fie egal cu produsul bazelor și așa ca $x-y=l$, dacă l este o lungime dată.

2° Presupunînd $x=y=\frac{a}{3}$, ce devine patrulaterul $EGHF$? Să se calculeze și aria totală a solidului $CDHFEG$ (cinci fețe).

● **40.** Se dă tetraedrul regulat $OABC$ cu muchia a. Pe înălțimea OI se ia punctul M astfel ca $OM=MI$. Se cere:

1° Aria secțiunii dusă prin muchia BC și prin punctul M.

2° Volumul piramidei care are ca bază această secțiune și ca vîrf punctul A.

● **41.** Să se arate că dacă notăm cu S aria totală a unui tetraedru și cu d_1, d_2, d_3, d_4 diametrii cercurilor înscrise fețelor lui, avem relația

$$d_1d_2d_3d_4 \leqslant \frac{S^2}{27}.$$

● **42*** Se dă tetraedrul $ABCD$. Lungimile celor 6 muchii ale sale sînt

$$AB=BC=2a;\ CD=DA=4a;\ AC=3a;\ BD=a\sqrt{11}.$$

1° Să se arate că două muchii opuse oarecare sînt ortogonale.

2° Să se calculeze lungimile perpendicularelor comune la trei perechi de muchii opuse.

3° Să se calculeze volumul tetraedrului.

4° Să se calculeze raza sferei înscrisă.

● **43.** Se consideră un paralelipiped dreptunghic și octaedrul ale cărui vîrfuri sînt centrele fețelor paralelipipedului. Se dau a, b, c lungimile muchiilor distincte ale paralelipipedului.

1° Să se calculeze volumul octaedrului.

2° Să se calculeze raza sferei înscrisă în octaedru.

3° Să se calculeze aria y a octaedrului.

4° Presupunînd lungimea a constantă și diagonala paralelipipedului egală cu $a\sqrt{2}$, să se calculeze valoarea maximă ce o poate lua y.

● **44.** Fie un unghi $\widehat{xOy}=30°$. Pe Ox se ia punctul A astfel ca $OA=a$ și se duce în A perpendiculara pe Ox care taie pe Oy în B.

a) Să se exprime OB și AB în funcție de a.

b) Se ia pe Ox punctul C astfel ca $OC=5a$ și din C se duce perpendiculara CD pe Oy. Să se demonstreze că triunghiurile AOB și OCD sînt asemenea. Fie H proiecția lui D pe OC. Să se calculeze OD, DC, HC, AD în funcție de a; se va lua $a=15$ mm.

c) Să se demonstreze că punctele A, B, C, D sînt situate pe un cerc a cărui rază se cere în funcție de a.

d) Din O se duce tangenta OT la acest cerc; se cere să se calculeze OT în funcție de a.

e) Să se afle aria și volumul corpului ce se obține prin rotirea patrulaterului $ACDB$ în jurul lui AC.

● **45.** Se dă triunghiul ABC în care $AB=AC=6$ cm și $\sphericalangle A=120°$. Fie O centrul cercului circumscris acestui triunghi și D punctul diametral opus lui A.

1° Să se arate că triunghiul BCD este echilateral.

2° Fie Δ perpendiculara în O pe planul triunghiului BCD și un punct $M\in\Delta$. Să se arate că $MB=MC=MD$.

3° Să se calculeze volumul tetraedrului $MBCD$ știind că $MB=6\sqrt{3}$ cm.

4° Se consideră două conuri avînd ca axă de rotație dreapta Δ. Baza unui con este cercul circumscris triunghiului BCD, iar baza celui-

lalt con este cercul înscris în același triunghi; care este raportul volumelor celor două conuri dacă înălțimile lor sînt egale?

5° Care este raportul volumelor celor două conuri dacă secțiunile lor axiale sînt triunghiuri echilaterale?

6° Ce relație există între generatoarele celor două conuri dacă suma ariilor laterale este 3π dm^2?

● **46.** Considerăm un semicerc (C) de diametru AB și de rază $OA=OB=R$. Pe raza OA, luăm un punct M la distanța $AM=x$. Descriem semicercurile (C') și (C'') de diametre respectiv MA și MB și situate de aceeași parte ca și (C) în raport de AB.

1° Considerăm suprafața (A) cuprinsă între (C), (C') și (C''). Să se calculeze aria și volumul solidului (S) generat de (A) prin rotirea sa completă în jurul lui AB.

2° Ducem prin O o dreaptă perpendiculară pe AB. Ea împarte pe (A) în două părți. Fie (A_1) cea care se află de partea lui M. Prin rotirea sa în jurul lui AB, (A_1) generează un solid (S_1). Să se calculeze aria și volumul acestui solid.

● **47.** Se dă un cerc de centru O și de rază R. Printr-un punct A situat la distanța $2R$ de centrul O $(OA=2R)$, ducem tangentele AB și AC la cerc.

1° Să se demonstreze că triunghiul ABC este echilateral.

2° Rotim figura în jurul lui OA. Să se afle raportul dintre aria calotei generată de arcul BM și aria laterală a conului generat de triunghiul AIB $(I=AO\cap BC)$.

3° Să se afle volumul porțiunii din conul precedent ce se află în afara sferei generată de cercul O. Să se interpreteze rezultatul obținut.

● **48.** Se consideră cercul de centru C, de rază R și tangenta AT într-un punct A al cercului. Construim raza CM care face cu CA un unghi $\widehat{ACM}=x$ și unim A cu M.

1° Să se calculeze în funcție de x și R volumul V generat de triunghiul ACM prin rotirea lui completă în jurul tangentei AT.

2° Să se studieze variația volumului V cînd x variază.

3° Să se calculeze cosinusul și sinusul valorii particulare a lui x cînd V este maxim.

● **49.** Se consideră un semicerc de diametru AB, de centru O și de rază egală cu a. O tangentă CD la acest semicerc intersectează tangentele duse în A și B respectiv în C și D. Notăm cu I punctul de contact al tangentei CD cu semicercul și cu J proiecția lui I pe AB. Construim OC, OD și OI.

1° Fie $AC=x$ și $BD=y$. Să se determine lungimile CI și DI. Să se arate că există relația: $xy=a^2$.

2° Rotind în jurul lui AB segmentul CD să se calculeze aria laterală a trunchiului de con obținut. Notînd cu S această arie, să se determine x și y în ipoteza că $S=4\pi$ m^2. Discuție. Să se deducă minimul lui S dacă facem să varieze tangenta CD.

3° Să se calculeze:

a) Volumul trunchiului de con generat prin rotirea trapezului $ABCD$ în jurul diametrului AB precum și diferența între acest volum și volumul sferei generate prin rotirea în jurul lui AB a semicercului.

b) Suma volumelor generate prin rotirea în jurul lui AB de triunghiurile ACJ, BDJ.

Să se compare rezultatele obținute.

● **50.** Se consideră două vîrfuri opuse O, O' ale unui paralelipiped $OABCO'A'B'C'$. Să se arate că diagonala OO' taie triunghiul $A'BC'$ în centrul său de greutate.

● **51.** Pe un semicerc cu diametrul $AB=2R$ se ia un punct M și se proiectează acest punct pe AB în P.

1° Considerăm aria ABM care este limitată de diametrul AB, coarda MB și arcul AM, și rotim această arie în jurul lui AB. Să se exprime volumul generat în funcție de R și de $AP=x$.

2° Să se determine x în așa fel ca volumul acesta să fie egal cu de m-ori volumul conului generat de triunghiul APM prin rotirea sa în jurul lui AP, m fiind un număr pozitiv dat. Discuție.

● **52.** Într-un plan P se ia un punct A și un cerc de rază R și centru O. Un punct S din spațiu se proiectează ortogonal pe planul P în punctul B, mijlocul lui OA. Se dă $SB=h$ și $OA=a$. Prin punctul A se duce o secantă AMN care intersectează cercul în punctele M și N. Să se calculeze volumul născut prin rotirea în jurul dreptei AMN a triunghiului SMN, în funcție de $\sphericalangle BAM=x$.

● **53.** Se consideră un trunchi de con circular, drept, înscris într-o sferă, de centru O, și sfera înscrisă în trunchi, avînd centrul în O_1. Cunoscînd raportul ariilor celor două sfere, egal cu 6, să se afle raportul razelor cercurilor de bază ale trunchiului de con.

● **54.** Se dă o emisferă de rază R și de centru O. Fie $O'C=x$ raza unei secțiuni (de diametru CD) a sferei cu un plan paralel cu baza (de diametru AB) a emisferei. Se duc AD și BC care se taie în S și se consideră cele două conuri SAB și SCD, opuse la vîrf, care au ca baze cercurile de diametre AB și CD.

1° Să se calculeze în funcție de R și x raportul y dintre suma volumelor conurilor și dublul volumului sferei de diametru OO'.

2° Să se determine x în așa fel ca raportul y să aibă o valoare dinainte dată, m. Discuție.

● **55.** Se dă un semicerc AOB, de rază $AO=OB=R$; o coardă paralelă cu AB întîlnește acest semicerc în două puncte, M și P.

1° Să se exprime aria triunghiului AMP în funcție de R și de unghiul $\widehat{MOP}=\alpha$. La ce distanță de dreapta AB trebuie dusă paralela MP pentru ca această arie să fie maximă; care este această valoare maximă?

2° Se consideră emisfera de centru O care este tăiată de planul figurii după semicercul dat. Planul perpendicular pe planul figurii, dus prin MP, taie această emisferă după un cerc C. Să se exprime în funcție de R și de distanța x de la dreapta MP la dreapta AB, volumul y al conului care are ca vîrf A și ca bază cercul C.

3° Să se studieze variația lui y cînd x variază și să se reprezinte grafic această variație. Ce valoare trebuie să aibă x pentru ca y să fie maxim? Care este această valoare maximă?

● **56.** 1°. Un trunchi de piramidă hexagonală regulată dreaptă, are laturile bazelor r și R și înălțimea h. Să se calculeze aria și volumul corpului.

2°. Să se calculeze raza sferei circumscrisă trunchiului de piramidă.

3°. Să se calculeze volumul segmentelor sferice determinate de bazele trunchiului în sfera circumscrisă lui.

4°. Să se determine relația dintre r, R și h în cazul cînd în trunchiul de piramidă se poate înscrie o sferă. Cum se calculează raza acelei sfere?

● **57*** Se dă un romb $ABCD$ ale cărui diagonale AC, BD se taie în O.

1° Să se arate că există un cerc înscris în acest romb. Să se exprime în funcție de raza R a acestui cerc suma pătratelor inverselor semidiagonalelor OA și OB.

2° Să se verifice că volumul V, generat de acest romb prin rotirea sa în jurul uneia din laturile sale, are ca valoare

$$V=4\pi R\cdot OA\cdot OB.$$

● **58.** Se secționează o sferă de rază R printr-un plan la distanța x de centrul sferei.

1°. Să se calculeze, în funcție de x și R aria S a cercului de secțiune precum și S_1 și S_2 ariile celor două zone determinate de acest plan pe sferă. Considerăm $S_1<S_2$.

2°. Să se afle cele două relații independente de x, care leagă cele trei mărimi S, S_1, S_2 și relația independentă de x și R care leagă aceleași mărimi.

● **59.** Se consideră într-un plan un cerc de centru O și de rază R. Pe prelungirea unui diametru AB luăm un punct P la distanța $OP=x$ de O și astfel ca A să fie exterior segmentului OP. Din P ducem tangenta PM la cerc. Conturul PMA compus din segmentul PM și arcul MA se rotește în jurul lui AP generînd o suprafață a cărei arie o notăm cu S.

1° Să se formeze expresia lui S în funcție de R și x.

2° Să se determine pe OP segmentul P_1P_2, pe care trebuie luat P, astfel ca aria S să fie cuprinsă între dublul și triplul ariei sferei de rază R.

● **60.** Se dă o sferă de rază R și AA' diametrul ei. Sfera este tăiată de un plan perpendicular pe diametrul AA', planul fiind situat la distanța x de A. El taie sfera după un cerc (C). Fie V și V' volumele conurilor având ca bază cercul (C) și vîrfurile în A și A'.

Să se calculeze

$$y=\frac{V+V'}{V_{sferei}}.$$

Să se studieze variația lui y în funcție de x și să se construiască funcția reprezentativă.

● **61.** Rotim un triunghi ABC în jurul unei drepte DE paralelă la una din înălțimile triunghiului și care nu-l traversează. Fie DE proiecția laturii AC pe această dreaptă.

1° Să se calculeze volumul generat de acest triunghi în funcție de laturile AC și BC și de DE și AD.

2° Să se arate că volumul este egal cu produsul ariei triunghiului prin lungimea cercului descris de centrul său de greutate.

● **62.** 1° Se dă triunghiul ABC având unghiul C ascuțit. Să se exprime în funcție de laturile a, b și unghiul C, volumul V_1 generat prin rotirea triunghiului în jurul laturii a și volumul V_2 generat de același triunghi prin rotirea în jurul unei perpendiculare duse în vîrful C pe latura a.

2° Fiind date: $a=\sqrt{2}$, $b=1$, $\frac{V_1}{V_2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$, să se calculeze unghiul C.

● **63.** Un triunghi echilateral ABC este înscris într-un cerc de centru O și de rază r. Fie $A'B'C'$ triunghiul simetric triunghiului ABC în raport cu O (A' simetricul lui A etc.)

1° Să se demonstreze că punctele de intersecție ale laturilor celor două triunghiuri sînt vîrfurile unui hexagon regulat și să se calculeze latura acestui hexagon.

2° Suprimînd laturile hexagonului și rotind figura în jurul diametrului AA' se obține un solid a cărui arie și volum se cere.

● **64.** Unei sfere i se circumscrie un trunchi de con. Raportul dintre aria laterală a trunchiului de con și aria sferei este $\frac{4}{3}$. Să se afle unghiul dintre generatoare și baza mare a trunchiului de con.

● **65.** Un romb are lungimea laturii l și unghiul ascuțit 2α. Știind că rombul este baza unei piramide, cu înălțimea cît diagonala mare a rombului, se cere:

1° Aria rombului și raza cercului înscris în el.
2°. Aria și volumul piramidei.
3°. Raza sferei înscrisă în piramidă.

● **66.** Să se înscrie într-o sferă de rază R un cilindru al cărui volum să fie echivalent cu suma volumelor segmentelor sferice care au aceeași bază cu cea a cilindrului.

● **67.** Se consideră un cerc (O) și A un punct pe cerc. Din A se construiesc, de aceeași parte a diametrului ce trece prin A, AB latura hexagonului înscris, AC latura pătratului și AD latura triunghiului echilateral înscris. $AC \cap BD = M$.

1° Să se arate că AM este bisectoarea unghiului $\widehat{BAD}$.
2° Să se calculeze în funcție de raza r a cercului segmentele MB, MD și AM.
3° Volumul corpului de rotație generat de triunghiul AMD prin rotirea sa în jurul lui AP (diametrul dus prin A).

● **68.** Se dă cercul O de rază r și un diametru fix AA'. Un diametru mobil BB' formează cu AA' un unghi x. Rotim pe rînd BB' în jurul diametrului $CC' \perp AA'$ și în jurul tangentei în C la cerc paralelă cu AA', obținînd în primul caz un con dublu iar în al doilea caz un trunchi de con. Să se determine x astfel ca cele două volume să fie în raportul 1 la 8 (Se va calcula x cu aproximație de 1 secundă).

● **69**** Un cerc cu centrul în O și raza r este un cerc mare al unei sfere S. În cercul O se consideră coarda QR care face unghiul α cu diametrul PQ. Coarda QR este urma în planul cercului O, a unui plan secant la sferă și care este perpendicular pe planul cercului O. Acest plan secant taie sfera după un cerc, în care se înscrie un pătrat $QARB$, care are una dintre diagonale după QR. Se consideră apoi piramida care are ca bază acest pătrat și ca vîrf punctul P diametral opus lui Q.

1° Să se calculeze volumul V al acestei piramide în funcție de $\sin \alpha$. Punînd $x = \sin \alpha$, să se determine variația lui V cînd x variază.
2° Să se arate că cele două fețe laterale ale piramidei care se taie după muchia PQ sînt două triunghiuri dreptunghice care au ca ipotenuză comună pe PQ.
3° Notînd cu 2β unghiul diedrului PQ al piramidei, să se calculeze $\cos \beta$ în funcție de $\sin \alpha$.

● **70.** Un trapez isoscel are perimetrul de 272 cm și în el se poate înscrie un cerc. Se cere:
1°. Aria trapezului, dacă baza mare întrece cu 64 cm baza mică.
2°. Să se afle raportul ariilor cercului înscris și circumscris trapezului.
3°. Să se calculeze aria și volumul corpurilor născute prin rotația trapezului în jurul laturilor sale.

● **71.** Două sfere de centre O și O' și de raze R și R' $(R>R')$ sînt tangente exterior. Se circumscrie acestor sfere un con cu vîrful S. Notăm cu T și T' punctele în care o generatoare atinge cele două sfere și cu C, C' centrele cercurilor de contact.

1° Să se arate că lungimea TT' este egală cu $2\sqrt{R\cdot R'}$; să se afle aria laterală a trunchiului de con generat de acest segment prin rotirea sa în jurul liniei centrelor.

2° Să se calculeze lungimile OS, $O'S$, ST, ST', $\rho=CT$, $\rho'=C'T'$ și distanța $d=CC'$. Să se calculeze aceste lungimi în cazul numeric: $R=117$ mm, $R'=52$ mm.

3° Să se exprime în funcție de R și R' volumul V al trunchiului de con generat de aria $CTT'C'$ prin rotirea completă în jurul liniei centrelor și apoi să se calculeze valoarea numerică în dm^3 a acestui volum pentru $R=117$ mm, $R'=52$ mm.

● **72*** Fiind date o sferă S, de centru O și rază R și o dreaptă D tangentă la sferă într-un punct A, se consideră un con C circumscris sferei S și a cărui vîrf se găsește pe dreapta D, acest con fiind limitat la vîrful T și la cercul de contact Γ cu sfera S. Se notează lungimea AT cu x.

1° Să se calculeze, în funcție de R și x, aria laterală și volumul conului C, de asemenea ariile celor două calote determinate de cercul T pe sfera S.

2° Să se determine x așa ca suma ariei laterale a conului C și a ariei calotei sferice detașate de cercul Γ și cuprinsă în interiorul conului C, să fie egală cu πmR^2, m fiind o cantitate pozitivă arbitrară.

● **73*** Se dă un semicerc de diametru $AB=2R$. Prin punctul A se duce o coardă AC care face cu AB unghiul x.

1°. Să se exprime în funcție de R și x ariile suprafețelor S și S' descrise de arcul AC și de raza OC, în urma unei rotiri în jurul diametrului AB. Să se calculeze apoi $\operatorname{tg} x$ așa ca să avem $S=S'$. Să se deducă de aici o construcție a punctului C.

2°. Mai general, să se determine $\operatorname{tg} x$ prin condiția $S-S'=m\pi R^2$ unde m este un număr pozitiv sau negativ dat. Discuție după valorile parametrului m.

● **74*** Se dă o sferă de centru O și rază R și o coardă AB a sferei, situată la distanța d de centru. Un plan variabil P, care trece prin AB, împarte sfera în două volume V_1 și V_2 $(V_1\geqslant V_2)$ cu ariile suprafețelor totale S_1 și S_2. Notînd cu x unghiul planului P cu poziția sa inițială, care este planul OAB, se cere:

1°. Ariile suprafețelor totale S_1 și S_2;

2°. Variația lor, cînd x crește de la 0° la 180°;

3°. Valoarea lui x așa ca $S_1=2S_2$, în cazul cînd $d=\dfrac{R}{2}$.

● **75.** Într-o sferă de centru O și rază R, să se ducă un plan secant astfel încît:

1°. Aria suprafețelor uneia dintre calotele obținute să fie egală cu aria suprafeței laterale a conului cu vîrful în O, baza fiind cercul de secțiune al sferei cu planul.

2° Volumul segmentului sferic determinat de calota precedentă, să fie egal cu volumul conului de mai sus.

● **76.** Două conuri circulare drepte au aceeași înălțime și aceeași axă, însă bazele lor sînt în cele două extremități ale înălțimii. Notînd cu g generatoarea și cu 2α unghiul la vîrf al primului con, iar cu 2β unghiul la vîrf al celui de-al doilea con, să se afle volumul comun al celor două conuri.

● **77.** Unei sfere îi este circumscris un trunchi de con drept, la care generatoarele formează cu planul bazei mari un unghi de 45°. Să se arate că aria lui laterală este dublul ariei sferei.

● **78.** Într-o sferă de rază R este înscris un cub și pe fețele lui sînt construite piramide regulate cu vîrfurile pe suprafața sferei. Să se afle volumul poliedrului format și să se arate în ce raport este față de volumul sferei.

● **79.** În interiorul bazei unei emisfere de rază R, este înscris un pătrat. Prin laturile pătratului se duc plane perpendiculare pe planul bazei emisferei. Se cere să se afle volumul porțiunii din emisferă după eliminarea celor patru jumătăți de segmente sferice determinate de cele patru plane.

● **80.** O pană folosită la despicat, se obține dintr-o prismă dreaptă cu secțiunea un triunghi isoscel, din care se taie la capete două tetraedre egale, fața prismei corespunzătoare bazei triunghiului isoscel rămînînd nemodificată. Se cere volumul penei, știind că fața prismei inițiale are dimensiunile a, b, că muchia penei opusă acestei fețe are lungimea c și că muchiile oblice au lungimea d.

● **81.** Volumul unui con circular drept, circumscris unei sfere, este egal cu produsul ariei totale prin a treia parte din raza sferei.

● **82.** Un trunchi de con drept are razele bazelor de 5 cm și 12 cm, iar înălțimea de 17 cm. Se cere raza sferei care trece prin circumferințele celor două baze.

● **83*** O pilă a unui pod (piciorul podului) se compune dintr-un trunchi de piramidă dreaptă, cu bazele dreptunghiuri de dimensiuni 3,4/2,1 m și 3/1,8 m și muchia laterală de 3,6 m. Pe una din fețele laterale ale trunchiului, care are bazele de 2,1 și 1,8 m, pila se completează cu jumătatea unui trunchi de con avînd ca baze două semicercuri de diametre 2,1 și 1,8 m, situate în prelungirea bazelor trunchiului de piramidă. Să se afle volumul pilei.

● **84.** Se dă trapezul isoscel $ABCD$ ($AB \| CD$, $AB > CD$) circumscris cercului de rază $R = 34$ cm. Perimetrul trapezului este 340 cm.

Se cere:

1° Laturile trapezului.

2° Aria corpului de rotație obținut prin rotirea completă a trapezului în jurul dreptei EF unde E este mijlocul bazei mici CD iar F mijlocul bazei mari.

3° Aria secțiunii dusă prin centrul sferei înscrise, paralelă cu bazele.

4° Aria cercului de tangență a sferei cu trunchiul de con.

● **85*** Într-un plan P fix se dă triunghiul isoscel ABC ($AB = AC$) fix. Se ridică în A o perpendiculară Δ pe acest plan și se ia pe această perpendiculară un punct variabil S.

1° Să se determine centrul O al sferei care trece prin punctele A, B, C, S. Să se afle locul geometric al lui O cînd S descrie dreapta Δ.

2° Să se calculeze raza sferei în funcție de $SA = x$, $AB = AC = b$, $BC = a$.

3° Să se calculeze, cu ajutorul aceloraşi date, raza cercului după care planul SBC taie sfera.

● **86*** Considerăm un cilindru de rotație. Cercurile bazelor au ca centre O și O' și ca raze R. Înălțimea cilindrului este $OO' = R\sqrt{2}$. Fie A un punct pe cercul bazei cu centrul O și B un punct al cercului cu centrul O'. A și B variază astfel ca unghiul razelor OA, $O'B$ să rămînă constant și egal cu α.

1°. a) Să se arate că unghiul format de AB cu OO' este constant.

b) Să se arate că mijlocul M al segmentului AB descrie un cerc (C); să se precizeze poziția centrului cercului (C). Să se calculeze în grade valoarea lui α în cazul cînd raza cercului (C) descris de punctul M este $\frac{R}{2}$.

2°. În cele ce urmează să considerăm $\alpha = 90°$.

a) Să se arate că toate fețele tetraedrului $OAO'B$ sînt triunghiuri dreptunghice. Să se calculeze aria acestui tetraedru.

b) Secționăm tetraedrul printr-un plan (Q) perpendicular pe OO' la distanța x de punctul O ($0 < x < R\sqrt{2}$). Ce formă are secțiunea în tetraedru? Să se calculeze în funcție de x aria S a acestei secțiuni.

● **87.** Se consideră o sferă (S) de centru O și de rază R și un con de rotație (C) cu raza bazei a și înălțimea h, circumscris sferei.

1° Să se determine a și h în funcție de R astfel ca secțiunile obținute în (S) și (C) printr-un plan dus prin O și paralel cu planul bazei conului să aibă ariile în raportul 2:1.

2° În acest caz, să se calculeze porțiunea de volum din con situată între sferă și vîrful conului.

Capitolul III
TRIGONOMETRIE

● **1.** Fiind date: $\cos\alpha=\frac{8}{17}$, $\sin\beta=-\frac{3}{5}$, $\alpha,\beta\in\left(\frac{3\pi}{2},\ 2\pi\right)$ să se calculeze: $\cos(\alpha+\beta)$.

● **2.** Să se simplifice expresia

$$E=\frac{2\cos^2x+4\sin x\cos x+\cos x+\sin x+1}{4\cos^2x-2\sin x\cos x+3\cos x+3\sin x-3}$$

● **3.** Să se simplifice fracția:

$$F=\frac{\sin\left(\frac{5\pi}{2}+x\right)+\cos 3x+\sin\left(\frac{\pi}{2}-5x\right)}{\sin 3x-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\sin 5x}$$

● **4.** Să se simplifice fracția:

$$F=\frac{\sin^2 14x-\sin^2 8x}{\cos^2 10x-\cos^2 12x}$$

● **5.** Să se simplifice fracția:

$$F=\frac{\sin 5x-\cos\left(\frac{\pi}{2}+3x\right)+\sin x}{\sin\left(\frac{9\pi}{2}+x\right)+\cos 5x+\sin\left(\frac{\pi}{2}+3x\right)}$$

● **6.** Să se facă calculabilă prin logaritmi expresia:

$$E=\frac{a\cos A+b\cos B-c\cos C}{a\cos A-b\cos B+c\cos C}$$

a, b, c, A, B, C fiind elementele unui triunghi.

● **7.** Să se transforme în produs expresia:

$$E=\sin\frac{5\pi}{24}+\cos\frac{11\pi}{24}+\sin\frac{\pi}{6}$$

● **8.** Să se arate că expresiile

$$\cos^2 x-2\cos x\cos a\cos(a+x)+\cos^2(a+x),$$

$$\cos^2 x+\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}+x\right)+\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)$$

sînt independente de x.

● **9.** Se dau: $E(x)=2\cos 5x\cos x+1$ și

$$f(x)=\frac{E(x)-\cos 4x+(3+2m)\cos 2x-1}{E(x)-\cos 6x+m}$$

Să se arate că $f(x)$ nu depinde de m.

● **10*** Să se calculeze:

$$A=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}}}$$

care conține n radicali.

● **11.** În dreptunghiul $ABCD$ avem $AB=3a$ și $BC=a$. Notînd $I=BD\cap EC$ ($AE=a$, $E\in AB$), se cere să se calculeze unghiul $\sphericalangle BIC=\alpha$.

● **12*** Să se arate că $\operatorname{tg}\frac{\pi}{24}=\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2$.

● **13.** Se dă triunghiul ABC cu unghiurile: $A=105°$ și $C=45°$. Notăm cu α unghiul format de mediana și bisectoarea unghiului B. Să se calculeze unghiul α.

● **14.*** În triunghiul ABC se cunoaște $a=2\sqrt{3}$, $b=2\sqrt{2}$ și $c=\sqrt{6}+\sqrt{2}$.

1°. Să se calculeze unghiurile A, B și C.
2°. Să se afle funcțiile trigonometrice ale unghiurilor de 75° și 15°.
3°. Să se calculeze înălțimile și bisectoarea interioară a unghiului A.

● **15*** Să se afle toate unghiurile ascuțite α, astfel ca atît $\operatorname{tg}\alpha$ cît și $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}3\alpha}$ să fie numere naturale.

● **16.** Să se arate că dacă $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{7}$ și $\sin\beta=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$, atunci $\alpha+2\beta=\dfrac{\pi}{4}$. ($\alpha$, β unghiuri ascuțite).

● **17.** Să se arate că funcția:

$$y=\operatorname{arctg}\frac{a-\sqrt{-x^2+2bx+a^2}}{x}+\operatorname{arctg}\frac{a+\sqrt{-x^2+2bx+a^2}}{x},$$

în intervalul în care ea există, are o valoare constantă independentă de x.

● **18.** Să se calculeze sumele:

$$C=1+\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\ldots+\cos nx$$

$$S=\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\ldots+\sin nx$$

în care $n\in\mathbf{N}$.

1°. Să se arate că suma $C+iS$ este o progresie geometrică în care rația este un număr complex de modul 1 ($i=\sqrt{-1}$).

2°. Să se exprime sumele C și S sub forma unui produs sau cît de termeni.

● **19.** Fiind date două axe perpendiculare Ox și Oy, trasăm o semidreaptă Oz astfel ca $(\vec{Ox}, \vec{Oz})=\theta$ $(0<\theta<90°)$. Un punct $A_1\in Ox$ se proiectează ortogonal pe Oz în B_1; B_1 se proiectează ortogonal în C_1 pe Oy; C_1 se proiectează ortogonal în D_1 pe Oz și D_1 se proiectează ortogonal în A_2 pe Ox, ș.a.m.d. Considerînd $OA_1=a$, să se calculeze $OA_2,\ldots,OA_n$ și suma $OA_1+OA_2+\ldots+OA_n$. Ce devine această sumă cînd $n\to\infty$.

● **20**** Să se arate că:

$$\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{3\pi}{15}\ldots\cos\frac{7\pi}{15}=\left(\frac{1}{2}\right)^7.$$

● **21*** Să se arate că:

$$\prod_{k=o}^{n} \cos 2^k\alpha = \cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha \ldots \cos 2^n\alpha = \frac{\sin 2^{n+1}\alpha}{2^{n+1}\sin\alpha}.$$

● **22**** Să se arate că

$$\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{k^2} < \frac{\pi}{2}.$$

● **23*** Să se stabilească formula:

$$P = \cos\frac{\pi}{2n+1}\cos\frac{2\pi}{2n+1}\ldots\cos\frac{n\pi}{2n+1} = \frac{1}{2^n}$$

utilizînd produsul PQ, unde

$$Q = \sin\frac{\pi}{2n+1}\cdot\sin\frac{2\pi}{2n+1}\ldots\sin\frac{n\pi}{2n+1}.$$

Aplicații:

$$\cos\frac{\pi}{5}\cdot\cos\frac{2\pi}{5}; \quad \cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7};$$

$$\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{3\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}.$$

● **24.** Să se arate că:

$$\sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\cos\dfrac{(n+1)x}{2}\sin\dfrac{nx}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}.$$

● **25.** Să se arate că avem

$$\operatorname{arc\,sin}\frac{4}{5} + \operatorname{arc\,sin}\frac{5}{13} + \operatorname{arc\,sin}\frac{16}{65} = \frac{\pi}{2}.$$

● **26*** Să se demonstreze identitatea

$$\frac{\sin\dfrac{\alpha}{2^n}}{\sin\left(\beta+\dfrac{\alpha}{2^{n-1}}\right)\sin\left(\beta+\dfrac{\alpha}{2^n}\right)}=$$

$$=\frac{1}{(a\cos\beta-b\sin\beta)\cos\beta}\left[\frac{a+b\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2^n}}{\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2^n}}-\frac{a+b\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2^{n-1}}}{\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2^{n-1}}}\right]$$

n fiind un număr natural ($n\geqslant 1$).

● **27**** Să se demonstreze identitățile:

a) $\cos\dfrac{2\pi}{7}+\cos\dfrac{4\pi}{7}+\cos\dfrac{6\pi}{7}=-\dfrac{1}{2}$,

b) $\sin\dfrac{2\pi}{7}+\sin\dfrac{4\pi}{7}-\sin\dfrac{6\pi}{7}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$.

Indicație. Se evaluează pătratul primului membru.

● **28*** Să se verifice că:

$$2^4\sin\frac{\pi}{15}\sin\frac{2\pi}{15}\sin\frac{4\pi}{15}\sin\frac{7\pi}{15}=1.$$

● **29.** Să se stabilească identitatea:

$$\sin a\sin(b-c)+\sin b\sin(c-a)+\sin c\sin(a-b)=0,$$

construind un determinant de ordinul trei.

● **30*** Să se demonstreze identitatea:

$$\cos\frac{2\pi}{15}+\cos\frac{4\pi}{15}+\cos\frac{8\pi}{15}+\cos\frac{16\pi}{15}=\frac{1}{2}.$$

● **31.** Să se arate că:

$$\operatorname{arctg}(3+\sqrt{7})+\operatorname{arctg}(3-\sqrt{7})+\operatorname{arc\,tg}(2+\sqrt{2})+\operatorname{arc\,tg}(2-\sqrt{2})=$$

$$=\pi+\operatorname{arctg}\frac{10}{23}.$$

● **32.** Să se arate că

$$4 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}.$$

● **33.** Să se arate că

$$\frac{1}{\sin \frac{\pi}{12}} - \frac{1}{\cos \frac{\pi}{12}} = 2\sqrt{2}.$$

● **34*** Să se determine A, B, C astfel ca expresia

$$E = \sin^4 x + \cos^4 x + A(\sin^6 x + \cos^6 x) + B(\sin^8 x + \cos^8 x) + C(\sin^{10} x + \cos^{10} x)$$

să fie independentă de x.

● **35**** Să se arate că

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{18} + \operatorname{tg}^2 \frac{5\pi}{18} + \operatorname{tg}^2 \frac{7\pi}{18} = 9.$$

● **36.** Să se stabilească identitatea:

$$\sqrt{\cos^2 \alpha + \sqrt{\cos 2\alpha}} + \sqrt{\cos^2 \alpha - \sqrt{\cos 2\alpha}} = \sqrt{2},$$

$$\text{unde } \alpha \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right].$$

● **37.** Să se arate că:

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{20} - \operatorname{tg} \frac{3\pi}{20} - \operatorname{tg} \frac{7\pi}{20} + \operatorname{tg} \frac{9\pi}{20} = 4.$$

● **38*** Să se stabilească identitățile:

1° $\sin^4 \frac{\pi}{8} + \sin^4 \frac{3\pi}{8} + \sin^4 \frac{5\pi}{8} + \sin^4 \frac{7\pi}{8} = \frac{3}{2}$,

2° $\cos^4 \frac{\pi}{8} + \cos^4 \frac{3\pi}{8} + \cos^4 \frac{5\pi}{8} + \cos^4 \frac{7\pi}{8} = \frac{3}{2}$.

● **39.** Să se demonstreze identităţile

1) $\sin\frac{\pi}{9}\sin\frac{2\pi}{9}\sin\frac{3\pi}{9}\sin\frac{4\pi}{9}=\frac{3}{16}$

2) $\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{3\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}=\frac{1}{16}$.

● **40.** Să se demonstreze egalitatea

$$(\sin 1001x+\sin 1000x)^2-(\sin 5001x+\sin 5000x)^2=$$
$$=(\cos 5001x+\cos 5000x)^2-(\cos 1001x+\cos 1000x)^2.$$

● **41**** Să se arate că polinomul

$$P(x)=(x^2-2ax\cos\alpha\sin^2\alpha-a^2\cos^4\alpha)^3+27a^2x^2\sin^2\alpha\cos^4\alpha(x-a\cos\alpha)^2$$

este divizibil cu $(x-a\cos^3\alpha)^2$ şi să se calculeze cîtul împărţirii.

● **42.** Să se arate că dacă $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, atunci avem şi

$$\frac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}+\frac{\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma}{\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma}+\frac{\operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\alpha}=1.$$

● **43**** Să se arate că dacă $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ atunci

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma+\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma>2\pi.$$

● **44.** Să se arate că avem

$$\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+2\beta)+\ldots+\cos(\alpha+n\beta)=$$
$$=\frac{\sin\frac{n+1}{2}\beta\cos\left(\alpha+\frac{n\beta}{2}\right)}{\sin\frac{\beta}{2}}.$$

● **45.** Să se arate că dacă $A+B+C+D=180^\circ$, avem

$$\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C+\operatorname{ctg}D=\frac{\sin(A+B)\sin(A+C)\sin(A+D)}{\sin A\sin B\sin C\sin D}$$

● **46.** Să se dovedească identitatea:

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha=1, \text{ dacă } \alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}.$$

● **47.** Să se arate că expresia

$$E=\frac{\cos 2x-(m-1)\cos 4x+m}{\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)+m\sin^2 x}$$

este independentă de parametrul m.

● **48.** Să se arate că dacă $\sin 2(a+c)=n\sin 2b$, atunci avem

$$\operatorname{tg}(a+b+c)=\frac{n+1}{n-1}\operatorname{tg}(a-b+c).$$

● **49.** Să se arate că avem

$$\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\beta}-\frac{2\cos(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}=\frac{\sin^2(\alpha-\beta)}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}.$$

● **50.** Să se arate că dacă

$$\frac{\cos x}{a}=\frac{\cos(x+a)}{b}=\frac{\cos(x+2a)}{c}=\frac{\cos(x+3a)}{d},$$

atunci

$$\frac{a+c}{b}=\frac{b+d}{c}.$$

● **51*** Să se găsească toate arcele $0\leqslant x\leqslant 2\pi$, $0\leqslant y\leqslant 2\pi$, așa ca

$$\left|\sin\left(x+y+\frac{\pi}{2}\right)\right|\geqslant\frac{1}{2}.$$

● **52**** Să se arate că, dacă $\alpha>0$, $\beta>0$ și $\alpha+\beta=60^\circ$ atunci avem și

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\leqslant\frac{1}{3}.$$

● **53*** Să se rezolve inecuația

$$\frac{\operatorname{tg}^2 x-\sin^2 x}{\operatorname{ctg}^2 x-\cos^2 x}>1.$$

● **54.** Să se rezolve inecuația:

$$\sin x\cos 6x>\cos x\sin 6x.$$

● **55*** Să se rezolve inecuația

$$\sin^2 x-\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}|\sin x|+\frac{\sqrt{6}}{4}<0.$$

● **56.** Să se arate că inegalitatea:

$$\sin^2 x+\cos x+1\geqslant 0$$

este adevărată pentru orice $x\in\mathbf{R}$.

●**57*** Să se rezolve inecuația

$$\left|\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\right|\leqslant 1.$$

● **58.** Să se rezolve inecuația:

$$2\cos x[1+(\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x)\sin 2x]\sin 3x>\cos 6x.$$

● **59**** Să se arate că, dacă $0<x<2\pi$ atunci avem:

a) $\sqrt{\operatorname{tg}^2 x-3}>1+2\operatorname{tg} x$
b) $\sin^2 x+\sin^2 2x>\sin^2 3x$
c) $\cos x\sin(\sin x)+\sin x\cos(\sin x)>0.$

● **60**** Să se rezolve ecuația

$$\log_{\sec x}(13{,}25)=\log_{\operatorname{tg} x}(12{,}25)$$

unde $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

● **61*** Să se rezolve ecuația

$$\log_{\cos x}\left(\frac{1}{2}-\cos x\right)+\log_{\frac{1}{2}-\cos x}\cos^2 x-3=0.$$

● **62.** Să se rezolve ecuația

$$\log_{\cos x}\sin x+4\log_{\sin x}\cos x=4.$$

● **63.** Să se rezolve ecuația

$$\operatorname{tg} x-2\sqrt{\operatorname{ctg} x}=\operatorname{ctg} x-2\sqrt{\operatorname{tg} x}.$$

● **64.** Să se rezolve ecuația

$$\sin^2 x+\sin^2 2x+\sin^2 3x=2.$$

● **65.** Să se rezolve ecuația:

$$3(\log_2\sin x)^2+\log_2(1-\cos 2x)=2.$$

● **66.** Să se rezolve ecuația:

$$\operatorname{tg}\left(3x+\frac{\pi}{5}\right)=\sqrt{5}\operatorname{tg}\left(3x+\frac{\pi}{10}\right).$$

● **67.** Fie

$$f(x)=\frac{\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}-x\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{8}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}.$$

Să se rezolve ecuația:

$$f(x)+(2+\sqrt{3})\cdot f(-x)=0.$$

● **68**** Să se arate că ecuația

$$x^3-3\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}x^2-3x+\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}=0$$

admite rădăcina

$$x_1=\operatorname{tg}\frac{\pi}{36}$$

și apoi să se calculeze celelalte rădăcini.

● **69.** Să se rezolve ecuația:

$$1+2^{\operatorname{tg} x}=3\cdot 4^{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\sqrt{2}\cos x}}$$

● **70.** Să se rezolve ecuația:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\cos 2x}-\left(\frac{1}{4}\right)^{\sin^2 x}=\frac{1}{2}.$$

● **71*** Să se rezolve ecuația:

$$|1+\operatorname{tg} x|+|1-\operatorname{tg} x|=2\sqrt{3}.$$

● **72.** Să se rezolve ecuația:

$$\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x=1.$$

● **73.** Să se rezolve ecuația

$$\operatorname{ctg}^2 x-\operatorname{tg}^2 x=16\cos 2x.$$

● **74.** Să se rezolve ecuația

$$2\sin^2 3x+\sin^2 6x=2.$$

● **75*** Să se rezolve ecuația:

$$\sin^2 x+\sin^2 3x+\sin^2 5x=\sin^2 7x+\sin^2 9x+\sin^2 11x.$$

● **76.** Să se rezolve ecuația:

$$2^{\sin^2 x}=\sin x.$$

● **77.** Să se rezolve ecuația:

$$x^4-4x^3\cos a\cos b+2x^2(1+\cos 2a+\cos 2b)-4x\cos a\cos b+1=0.$$

● **78.** Să se rezolve ecuația:

$$2\cos 2x+4\sin x+1=0.$$

● **79.** Să se rezolve ecuația:

$$\cos 6x - \sin 6x = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

● **80.** Să se rezolve ecuația:

$$\sin x \cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}.$$

● **81.** Să se rezolve ecuația:

$$\sin^3 x(1+\operatorname{ctg} x)+\cos^3 x(1+\operatorname{tg} x)=\cos 2x.$$

● **82.** Să se rezolve și să se discute ecuația:

$$(2m-1)\cos x+m\sin x=3m-1,$$

m fiind un parametru variabil. Calcul numeric pentru $m=\frac{1}{4}$.

● **83.** Să se rezolve ecuația

$$\frac{1}{\cos \alpha}+\frac{1}{\sin \alpha}+\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha=0.$$

La fiecare soluție α corespunde un punct $M(x, y)$ unde $x=\cos\alpha$, $y=\sin\alpha$. Să se indice diversele puncte M astfel obținute.

● **84.** Să se rezolve ecuația:

1) $$(1+a)\sin x+(1-a)\cos x+1=0.$$

2) Poate avea această ecuație rădăcini egale?

3) Ecuația mai generală $(1+a)\sin x+(1-a)\cos x+b=0$ poate avea două rădăcini egale?

4) Dacă da, a și b, în acest caz, pot fi simultan sinusul și cosinusul aceluiași unghi θ?

● **85.** Se consideră ecuația:

$$\operatorname{tg}^2(2a+b)=\sin^2 p\sin^2 q-\cos^2 p\cos^2 q$$

1) Să se calculeze arcele a cuprinse între $0°$ și $360°$, care verifică ecuația dată, știind că $b=47°21'30''$, $p=53°41'20''$, $q=101°27'15''$.

2) Să se calculeze arcele p și q definite de această ecuație știind că ele sînt cuprinse între $0°$ și $180°$, că diferența lor este $15°$ și că $2a+b=210°$.

● **86.** Să se rezolve ecuația

$$4a^2\sin(x+B)\sin(x+C)=(b+c)^2+2bc,$$

unde B și C sînt unghiurile ascuțite ale unui triunghi dreptunghic ABC, iar a, b, c sînt ipotenuza și catetele triunghiului.

● **87.** Să se rezolve ecuația:

$$\arccos x+\arccos(1-x)=\arccos(-x),$$

pentru funcția arc cosinus luîndu-se ramura principală.

● **88.** Să se rezolve ecuația:

$$\operatorname{tg}(\pi \operatorname{tg} x)=\operatorname{ctg}(\pi \operatorname{ctg} x).$$

● **89*** Să se rezolve ecuația:

$$\left|\lg_{\frac{1}{3}}(1+\sin 2x)\right|+\left|\lg_{\frac{1}{3}}(1-\sin 2x)\right|=1.$$

● **90**** Se consideră sistemul de ecuații

$$\cos x=m\cos 2y,\quad \cos y=m\cos 2x,$$

unde m este un parametru.

1° Să se afle soluțiile pentru care $\cos x=\cos y$. Discuție.

2° Să se afle celelalte soluții. Discuție.

● **91.** Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} 3^{\cos 2x+\cos 2y}=1 \\ 4^{\cos x\cos y}=2. \end{cases}$$

● **92*** Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} (1+\sqrt{3})\sin(x+y)=(1-\sqrt{3})\sin(x-y) \\ \operatorname{tg} x\operatorname{tg} y=-\sqrt{3} \end{cases}$$

● **93.** Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} \cos x - \cos y = \sin(x-y) \\ \sin x - \sin y = \sin 2x - \sin(x+y). \end{cases}$$

● **94.** În triunghiul ABC se cunosc $AC=2a$, $BC=a\sqrt{13+6\sqrt{3}}$ și $A=150°$. Să se calculeze AB.

● **95.** Se dă triunghiul ABC în care se cunosc $BC=159{,}3$ cm, $B=73°43'30''$ și înălțimea dusă din A, $AD=112{,}2$ cm. Se cere să se calculeze laturile, unghiurile și aria triunghiului.

● **96.** Știind că între unghiurile unui triunghi ABC avem relația $3B+2C=180°$, să se afle ce relație există între laturile triunghiului.

● **97.** Să se arate că dacă într-un triunghi ABC există relația

$$\sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C}$$

atunci triunghiul este dreptunghic.

● **98.** Să se arate că dacă într-un triunghi ABC avem relația:

$$\frac{\sin B + \cos C}{\cos B + \sin C} = \operatorname{tg} B$$

atunci triunghiul este dreptunghic.

● **99.** Să se arate că în orice triunghi dreptunghic ABC $(A=90°)$, avem relația:

$$\cos(2C-B) = \frac{c}{a^3}(3a^2-4c^2).$$

● **100.** Dacă α este unghiul format de mediana AM a unui triunghi dreptunghic, cu ipotenuza BC, avem relația:

$$2(b^4+c^4) = a^4(\cos^2\alpha+1).$$

● **101.** Să se arate că dacă într-un triunghi avem relația

$$\frac{\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} C} = \frac{\sin^2 B}{\sin^2 C}$$

atunci triunghiul este isoscel sau dreptunghic.

● **102*** Într-un triunghi dreptunghic ABC $(A=90°)$ se dă ipotenuza a și produsul bisectoarelor interioare ale unghiurilor B și C egal cu k^2.

Să se arate că:

$$\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{k^2}{4a^2}.$$

● **103*** Ce fel de triunghi este acela în care avem relațiile

$$\frac{a^3+b^3-c^3}{a+b-c}=c^2 \text{ și } \sin A\cdot\sin B=\frac{3}{4}.$$

● **104*** Să se arate că dacă într-un triunghi avem relația

$$a+b=tg\frac{C}{2}(a\operatorname{tg}A+b\operatorname{tg}B)$$

atunci triunghiul este isoscel.

● **105*** Să se arate că dacă într-un triunghi avem relația:

$$\cos A+\cos B-\cos(A+B)=\frac{3}{2}$$

atunci triunghiul este echilateral.

● **106.** Să se arate că dacă într-un triunghi avem relația

$$a=2b\cos C$$

atunci triunghiul este isoscel.

● **107.** Să se exprime lungimile bisectoarelor interioare ale unui triunghi ABC cu ajutorul lungimilor laturilor care pleacă din același vîrf cu bisectoarea și a funcțiilor trigonometrice ale acestui unghi.

● **108.** Să se demonstreze că triunghiul în care avem relația

$$(p-b)\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=p\cdot\operatorname{tg}\frac{B}{2}$$

este isoscel.

● **109.** Să se arate că într-un triunghi oarecare avem relația:

$$b^2\sin 2C-c^2\sin 2B=2bc\sin(B-C).$$

● **110.** Să se arate că dacă triunghiul ABC are unghiul $A=60°$ atunci avem relația:

$$\sin^2 B-\sin^2 C=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(B-C).$$

● **111.** Să se arate că în orice triunghi avem relația

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{abc}=\frac{1}{R}(\operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} B+\operatorname{ctg} C).$$

● **112.** Să se arate că în orice triunghi avem relația

$$bc\cos^2\frac{A}{2}+ac\cos^2\frac{B}{2}+ab\cos^2\frac{C}{2}=p^2.$$

● **113.** Să se arate că, dacă într-un triunghi avem relația

$$3a=b+c$$

atunci avem și relația

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{1}{2}$$

și reciproc

● **114.** Să se arate că în orice triunghi

$$s=p^2\cdot\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{B}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{C}{2}$$

unde s este aria iar p semiperimetrul.

● **115.** Să se arate că în orice triunghi avem relația

$$4S=b^2\cdot\sin 2C+c^2\cdot\sin 2B,$$

unde S este aria triunghiului.

● **116.** Să se arate că dacă α, β, γ sînt lungimile bisectoarelor interioare ale unui triunghi corespunzătoare laturilor a, b, c, atunci avem relația

$$\frac{1}{\alpha\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\beta\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\gamma\sin\frac{C}{2}}=\frac{a+b+c}{S}.$$

● **117.** Să se arate că în orice triunghi avem relația

$$a+b+c=r+r_a+r_b+r_c$$

notațiile fiind cele cunoscute.

● **118*** Fiind dat triunghiul ABC cu laturile a, b, c, R raza cercului circumscris și r_a, r_b, r_c razele cercurilor exînscrise, să se stabilească relațiile:

$$a\operatorname{tg}\frac{A}{2}+b\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+c\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=2(2R+r_a)$$

$$a\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+b\operatorname{tg}\frac{B}{2}+c\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=2(2R+r_b)$$

$$a\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+b\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+c\operatorname{tg}\frac{C}{2}=2(2R+r_c).$$

● **119*** Să se arate că în orice triunghi

$$\left(\frac{h_a}{f_a}\right)^2+\left(\frac{h_b}{f_b}\right)^2+\left(\frac{h_c}{f_c}\right)^2=1+2\frac{h_a\cdot h_b\cdot h_c}{f_a\cdot f_b\cdot f_c}$$

unde h_a, h_b, h_c sînt înălțimile iar f_a, f_b, f_c bisectoarele interioare.

● **120*** Dacă notăm cu A_1, B_1, C_1 punctele de contact ale cercului înscris triunghiului ABC cu laturile acestui triunghi, cu S aria triunghiului ABC și cu S_1 aria triunghiului $A_1B_1C_1$, să se arate că avem relația:

$$S\cdot r=2S_1R,$$

unde r, R sînt razele cercului înscris și circumscris triunghiului ABC.

● **121**** Să se arate că în orice triunghi

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\leqslant\frac{3}{2}$$

unde α, β, γ sînt unghiurile triunghiului.

● **122.** Se dă un cerc de centru O și de rază R. Pe tangenta în B, luăm punctul A astfel ca unghiul BAO să fie egal cu un unghi dat α. Prin punctul A ducem o secantă care taie cercul în punctele C și D.

1° Să se calculeze, în funcție de R, α și de unghiul $BAC=x$, aria triunghiului BCD sub o formă calculabilă prin logaritmi.

2° Pentru ce valoare a lui x, aria triunghiului BCD este maximă?

3° Să se calculeze aria maximă, dacă $\alpha=45°$.

● **123.** Să se calculeze maximul și minimul funcțiilor:

1° $y=\sin x+\cos x$

2° $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

● **124.** Pe un semicerc cu centrul în O și diametrul $AB=2R$, se consideră un punct M definit prin unghiul $OAM=x$. Se unește O cu M și se construiește pe AM ca latură un triunghi echilateral AMC exterior triunghiului AOM.

Se cere:

1) Să se calculeze în funcție de x și R aria patrulaterului $AOMC$.

2) Să se determine x astfel ca aria acestui patrulater să fie egală cu mR^2 (m fiind parametru real). Discuție.

3) Să se calculeze x în următoarele cazuri particulare:

$$m=\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ și } m=1+\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

● **125*** Se dă triunghiul dreptunghic ABC ($A=90°$) și înălțimea AH. Fie r, r_1, r_2 razele cercurilor înscrise în triunghiurile ABC, AHB, AHC.

a) Să se arate că:

$$r_1=r\cdot\frac{AB}{BC} \text{ și } r_2=r\cdot\frac{AC}{BC}.$$

b) Să se deducă apoi că:

$$r_1^2+r_2^2=r^2.$$

● **126.** Un cerc de rază r și de centru C este tangent în O la o dreaptă D. Dintr-un punct B al dreptei OC ducem tangente la cerc care intersectează dreapta D în A și A'. Notăm

$$OA=x,\ \widehat{OAC}=\alpha.$$

1) Să se exprime OA, OB și AB în funcție de r și α.

2) Să se arate că AB este egală cu valoarea absolută a fracției $\frac{x(x^2+r^2)}{x^2-r^2}$.

3) Să se studieze variația perimetrului y a triunghiului ABA' dacă x variază. Să se construiască curba reprezentativă. Să se determine triunghiul pentru care y este minim.

● **127.** Se dă un segment de dreaptă AB de lungime d și pe AB, ca diametru, descriem un semicerc. Fie C un punct pe semicerc. Notăm $\alpha = \widehat{BAC}$. Din C ducem o perpendiculară pe AB într-un punct P. Prelungim segmentul AC cu o lungime $CM = \frac{2}{3} CP$. Se cere:

1° Să se calculeze în funcție de d și α lungimile AC, CP, BC și AM. Să se determine unghiul α, în cazul cînd $MB \perp AB$;

2° Să se exprime în funcție de d și de $\cos \alpha$, aria S a triunghiului MCB.

● **128*** Se dă triunghiul isoscel ABC $(AB=AC)$ cu $\sphericalangle A = 20°$. Se construiesc în interiorul triunghiului unghiurile $\widehat{DBC} = 20°$ $(D \in AC)$ și $\widehat{ECA} = 20°$ $(E \in AB)$. Se cere $\alpha = \widehat{DEC}$.

● **129.** Se dă patrulaterul convex inscriptibil $ABCD$ în care se cunosc: $AB=a=4{,}32$ m; $BC=b=2{,}28$ m; $CD=c=7{,}31$ m; $DA=d=3{,}19$ m. Să se calculeze, cu aproximația ce o dau tabelele de logaritmi cu 5 zecimale, unghiurile, diagonalele, aria și raza cercului circumscris patrulaterului dat.

● **130.** Se dă semicercul de diametru $AB=2R$. În A ducem pe tangenta la cerc în A segmentul $AC=AB$. Fie M un punct oarecare al semicercului ce se află de aceeași parte cu C față de diametrul AB. Construim AM și CM.

1) Să se calculeze în funcție de R și de unghiul $MAB=x$, segmentele AM și CM.

2) Să se determine x cu condiția ca expresia $AM^2+CM^2=4mR^2$, m fiind un număr dat. Discuție.

● **131.** Fie M un punct situat pe un sfert de cerc de centru O și de rază R, A și B punctele de intersecție ale tangentei la cerc în M cu laturile unghiului la centru corespunzător $(AOB=90°)$. Considerăm dreptunghiul $AOBC$ avînd ca laturi OA și OB.

1) Să se calculeze, în funcție de R și de unghiul $AOM=x$, laturile triunghiului ABC precum și înălțimea CH. Să se stabilească geometric acest ultim rezultat. Care este minimul distanței OC cînd M parcurge sfertul de cerc?

2) P și Q fiind respectiv proiecțiile lui M și H pe OA, să se arate că triunghiurile OMP și OHQ sînt echivalente.

3) Să se calculeze aria patrulaterului $OMCH$ și să se determine numeric valoarea lui x astfel ca această arie să fie egală cu $\frac{1}{4}R^2$.

● **132*** Într-un trapez $ABCD$, dreptunghic în A și D, se proiectează vîrfurile B, C, D în B', C', D', pe o dreaptă oarecare care trece prin A și nu taie trapezul. Notînd $AB=a$, $CD=b$, $AD=h$, se cere:

1° Să se arate că avem

$$1=\frac{BB'^2}{a^2}+\frac{DD'^2}{h^2};$$

2° Să se afle relația dintre lungimile BB', CC' și DD';

3° În ce caz avem $2DD'=BB'+CC'$.

● **133.** Se cere înălțimea x a unui stîlp de antenă de radio, știind că el se vede de la distanțele de 100, 200, 300 m de piciorul lui sub unghiurile α, β, γ și așa ca $\alpha+\beta+\gamma=90°$.

● **134*** Cercurile de raze r și R și de centre O_1, O sînt tangente în A la dreapta AD și se află de aceeași parte a acestei drepte. O dreaptă paralelă cu AD taie cele două cercuri în punctele B și C (B fiind pe cercul cu raza mai mică), ambele de aceeași parte a liniei centrelor. Notînd $\alpha=\sphericalangle BAC$ și $\beta=\sphericalangle OAB$, să se afle raza cercului circumscris triunghiului ABC.

Capitolul IV
PROBLEME DIVERSE

● **1**** Se propune măsurarea distanței de la un punct O la un punct P care nu se vede din O. În acest scop se aleg două puncte A și B, în linie dreaptă cu O și din care se văd punctele O și P. Se măsoară distanțele $OA=a$, $OB=b$ și unghiurile $\widehat{OAP}=A$ și $\widehat{OBP}=B$.

1° Să se verifice că distanța x căutată este dată prin formula

$$x^2=\frac{a^2\sin^2 A+b^2\sin^2 B-2ab\sin A\sin B\cos(A+B)}{\sin^2(A+B)}.$$

2° Se aleg punctele A și B în așa fel încît suma unghiurilor corespunzătoare să fie foarte apropiată de un unghi drept și se pune $A+B=\frac{\pi}{2}+y$, y fiind evaluat în radiani. Să se arate că dacă se pune $\frac{b\sin B}{a\sin A}=\operatorname{tg}\varphi$, se poate lua formula apropiată

$$x=\frac{a\sin A}{\cos\varphi}+ky,$$

k fiind un coeficient ce trebuie calculat.

3° Să se calculeze x, cu o eroare de ordinul unui decimetru, cu următoarele date numerice

$$a=250\text{ m}, \qquad b=386{,}4\text{ m}$$
$$A=16°{,}8 \qquad B=37°{,}4.$$

● **2.** 1°. Să se calculeze $\cos\alpha$ în funcție de $\cos\frac{\alpha}{4}$.

2°. Să se rezolve ecuația în x

$$8x^4-8x^2+1-\cos\alpha=0 \tag{1}$$

unde $\cos\alpha$ este dat.

3°. Să se arate că dacă punem $y=mx$, ecuația în y

$$y^4-py^2+q=0$$

unde p și q sînt două numere pozitive, se poate reduce la ecuația (1), pentru valori ale lui m și $\cos\alpha$, ce urmează să se determine în funcție de p și q, dacă este îndeplinită o anumită condiție ce urmează a fi explicitată.

4°. Să se deducă că rădăcinile ecuației

$$y^4-y^2\sqrt{2}+\frac{1}{8}=0$$

sînt proporționale cu cosinusurile a patru arce cuprinse între 0 și π. Care sînt cele patru arce? Să se stabilească factorul de proporționalitate.

5°. Cînd se poate rezolva, printr-o metodă analoagă, ecuația în y

$$y^6+py^4+qy^2+r=0\ ?$$

6°. Să se afle numărul rădăcinilor reale în $\cos\varphi$ pentru ecuația

$$\cos^4\varphi-2y_0\cos^2\varphi+x_0=0.$$

● **3.** Într-un triunghi ABC, bisectoarea AD este egală cu segmentul DC pe care-l determină pe BC.

1°. Cunoscînd $AB+AC=mBC$, să se calculeze cosinusurile unghiurilor triunghiului. Pentru ce valori ale lui m problema este posibilă? Să se determine m astfel ca cele trei unghiuri să fie ascuțite.

2°. Să se arate că avem $BC^2=AB(AB+AC)$. Să se calculeze cele trei laturi în funcție de m și $AD=k$.

● **4.** Se dă un cerc de rază R. Se consideră un triunghi ABC înscris în acest cerc, vîrful A fiind fix pe cerc și unghiul A constant. Se notează cu x unghiul variabil făcut de diametrul AA' cu bisectoarea AF a unghiului A.

1°. Să se calculeze în funcție de R, A și x laturile triunghiului ABC, aria S și raza r a cercului înscris.

2°. Să se calculeze maximul S_1 a lui S, cînd x variază singur, apoi maximul S_2 a lui S cînd variază A.

3°. Să se arate că înălțimile triunghiului ABC, coborîte din vîrfurile B și C, trec fiecare printr-un punct fix situat pe cerc, cînd x variază. Să se afle locul picioarelor acestor înălțimi.

4°. Fie I centrul cercului înscris lui ABC și F punctul de întîlnire al lui AI cu cercul. Să se arate că $FI=FB=FC$ și că perpendiculara la AI, dusă prin I rămîne tangentă la un cerc fix de centru A', cînd x variază.

● **5.** Să se construiască centrul sferei circumscrise unui tetraedru care are un triedru tridreptunghic. Să se deducă apoi că, dacă considerăm un triedru tridreptunghic care are ca vîrf un punct fix S pe o sferă, cele trei puncte A, B, C unde muchiile sale înțeapă sfera, definesc un plan care trece printr-un punct fix dacă S se deplasează pe sferă.

● **6.** Prin vîrfurile A, B, C ale unui triunghi echilateral se duc dreptele $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ care fac unghiul α respectiv cu laturile AB, BC și CA (unghiul α este măsurat în sensul mișcării acelor ceasornicului).

1°. Să se arate că triunghiul $A'B'C'$ este echilateral și la fel orientat ca și ABC.

2°. Să se afle locul vîrfurilor A', B', C' cînd α variază.

3°. Să se arate că dreptele care unesc mijloacele laturilor triunghiului $A'B'C'$, cînd α variază, trec fiecare printr-un punct fix.

4°. Să se calculeze raportul de asemănare al celor două triunghiuri ABC și $A'B'C'$ și să se studieze variația lui, cînd unghiul α crește de la $-\frac{\pi}{6}$ la $\frac{5\pi}{6}$.

● **7.** Se consideră un semicerc de diametru $AB=2R$. Pe semicerc se consideră o coardă variabilă CD de lungime R.

1°. Să se afle unghiurile și laturile patrulaterului $ACDB$ în funcție de unghiul $\alpha=\widehat{BAC}$.

2°. Notînd cu F punctul de întîlnire al dreptelor AC și BD, să se afle unghiurile, laturile și raza cercului circumscris triunghiului CDF.

3°. Să se construiască locul geometric al punctului F.

4°. Să se examineze și să se construiască figura în cazul cînd $AC=3CF$.

● **8*** În orice triunghi ABC, avem relațiile:

$$r_a r_b r_c > (3r)^3;\ \operatorname{tg}^2\frac{A}{2}\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}\operatorname{tg}^2\frac{C}{2} \leqslant \frac{1}{27},$$

notațiile fiind cele obișnuite.

● **9.** Se consideră ecuația

$$\operatorname{tg}^2 x - 2(\lambda-1)\operatorname{tg} x + 2\lambda + 1 = 0$$

unde necunoscuta este $\operatorname{tg} x$ și λ este un parametru real.

1°. Să se discute natura și semnul rădăcinilor ecuației.

2°. Presupunînd că ecuația are două rădăcini reale, care reprezintă tangentele a două unghiuri B și C ale unui triunghi ABC, cum trebuie ales λ?

Poate fi acest triunghi dreptunghic? Cînd este el isoscel?

● **10.** 1° Să se studieze variația funcției:

$$y=2\sin^2 x-3\cos x$$

cînd arcul variază între 0 și 2π.

2° Din variația funcției, să se deducă numărul arcelor cuprinse între 0 și 2π care verifică ecuația

$$2\sin^2 x-3\cos x-m=0.$$

Discuție după valorile atribuite parametrului m.

● **11.** Se consideră două drepte OM, OM' ce fac între ele un unghi 2α și două cercuri de centre C, C', de raze r, r' și tangente fiecare la cele două drepte.

1°. Se cere să se examineze variația ariei dreptunghiului $OCPC'$, cînd suma $r+r'$, sau diferența $r-r'$, sau cîtul $\frac{r}{r'}$, sau produsul rr' rămîne constant.

2°. Produsul rr' fiind constant, cum variază aria dreptunghiului, cînd variază unghiul α?

3°. Unghiul 2α și cîtul $\frac{r}{r'}$, fiind constante, care este locul geometric al punctului P?

● **12.** Se consideră un semicerc de diametru $AB=2R$. Se duce tangenta AT în extremitatea diametrului. Să se afle pe semicerc un punct M așa fel că dacă unim pe M cu B și din M coborîm perpendiculara MC pe AT să avem relația

$$MB+2MC=l,$$

unde l este o lungime dată. Se va lua ca necunoscută $\widehat{ABM}=x$.

● **13.** Se dă un triunghi ABC al cărui ortocentru este în H. Piciorul înălțimii din A este notat cu A'.

1°. Se notează cu θ unghiul ascuțit făcut de mediana AM cu latura BC; presupunînd că $B>C$ să se arate că avem

$$2\operatorname{ctg}\theta=\operatorname{ctg} C-\operatorname{ctg} B.$$

2°. Să se calculeze HA' și să se arate că, pentru ca H să fie mijlocul lui AA', trebuie ca unghiurile B și C să fie legate prin relația $\operatorname{tg} B\ \operatorname{tg} C=2$.

3°. Cunoscînd unghiul θ și fiind îndeplinită condiția de la Nr. 2 să se calculeze $\operatorname{tg} A$, $\operatorname{tg} B$, $\operatorname{tg} C$.

● **14.** Se consideră un cerc de diametru $AB=1$m.

1°. Să se afle pe acest cerc un punct M astfel încît coarda BM să fie medie proporțională dintre coarda AM și diametrul AB. În acest caz să se calculeze, cu aproximație de un centimetru, lungimea tangentei MT și să se determine arcul AM în radiani și în grade sexagesimale.

2°. Să se determine pe cerc un alt punct M', așa fel încît coarda BM' să fie medie aritmetică dintre coarda AM' și diametrul AB. Să se calculeze apoi arcul AM', în radiani și grade sexagesimale.

3°. Pe cerc să se găsească un punct M așa fel ca notînd cu T intersecția tangentei în M cu diametrul AB să avem $TM=k\,BM$, unde k este o constantă, dată dinainte. Să se discute problema după diferitele valori date lui k.

4°. Dacă se notează $AM=x$, să se studieze variația lui k, în funcție de x.

● **15.** Fie ABC un triunghi dreptunghic în A și fie AH înălțimea corespunzătoare acestui vîrf. Să se determine unghiul B, știind că avem relația

$$\frac{1}{AB}+\frac{2}{AC}=\frac{m}{AH}$$

unde m este un număr pozitiv dat. Să se discute după valorile date lui m.

● **16.** Se dă un segment $AB=2a$, avînd mijlocul în O. Prin O se duce o semidreaptă Ox, care face cu OB un unghi ascuțit dat θ.

1°. Să se afle pe Ox un punct M astfel ca

$$\widehat{OMB}=2\,\widehat{OMA}.$$

Discuție.

2°. Presupunînd unghiul θ necunoscut, cuprins între 0 și π, să se determine acest unghi așa fel ca perimetrul triunghiului AHB să fie cît o lungime l, unde H este piciorul perpendicularei coborîtă din B pe Ox.

● **17*** Într-un triunghi ABC se cunosc laturile: b, c și unghiul A. Un punct M descrie bisectoarea interioară a unghiului A, presupusă nelimitată, și-l definim prin $AM=x$.

1°. Să se studieze variația pătratului raportului $\dfrac{MB}{MC}$.

2°. Să se arate că pozițiile care corespund la maxim și la minim sînt cele corespunzătoare centrului cercului înscris și centrului cercului exînscris triunghiului ABC.

3°. Să se reprezinte grafic, în ipoteza că $b=3$, $c=2$ și $\hat{A}=120°$.

● **18*** Să se construiască un triunghi ABC cînd se cunosc:

1° Latura $BC=a$, înălțimea corespunzătoare acestei laturi, h_a și unghiul A, opus laturii.

2° Latura $BC=a$, unghiul B așezat pe latură și, R, raza cercului circumscris.

3° Latura $BC=a$; unghiul A, opus acestei laturi și raza cercului înscris, r.

● **19.** Două cercuri ortogonale au centrele în B și C iar razele sînt r și R, punctele lor comune sînt A și A' iar H este intersecția coardei comune cu linia centrelor. Se notează unghiul $ABC=x$ și E și F intersecțiile cercurilor B și C cu linia centrelor.

1°. Să se calculeze în funcție de r și de x, raza R a cercului C, segmentele HE, HF și EF.

2°. Să se determine unghiul x așa fel ca $EF=mAB$ unde m este un număr dat. Discuție.

3°. Cînd $m=\sqrt{3}-1$ să se calculeze x.

● **20.** Se dă un cerc O de rază R și se notează cu A,B,C unghiurile unui triunghi ABC înscris în cerc. Se presupune că $B<C$.

1°. Tangenta în A la cercul dat, taie dreapta BC într-un punct I. Se cere să se calculeze unghiurile triunghiului ACI și lungimea AI în funcție de B, C și R.

2°. Să se construiască un cerc tangent în A la cercul dat și la dreapta BC. Să se arate că problema are totdeauna două soluții și apoi să se calculeze razele R_1 și R_2 ale celor două cercuri, în funcție de B, C și R.

3°. Cunoscînd unghiul A să se calculeze unghiurile B și C ale triunghiului ABC așa fel ca să avem

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{1}{m}$$

unde m este o lungime dată. Discuție.

● **21.** Se dă un semicerc de diametru $AB=2a$ și prin A se duce o coardă AM definită prin $\widehat{BAM}=\varphi$, tangentele în A și M se taie în T; se rotește, în jurul diametrului AB, figura care este formată din tangentele AT, TM și arcul de cerc $\overset{\frown}{MB}$.

1° Să se calculeze în funcție de a și φ, aria generată.

2° Să se studieze variația acestei arii cînd φ variază și să se reprezinte grafic.

3°. Să se calculeze volumul limitat de această suprafață și să se studieze variația lui în aceleași condiții ca și aria.

● **22*** Unghiurile unui triunghi verifică relația

$$2\operatorname{tg} A=\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C. \tag{1}$$

1°. Să se arate că această relație este echivalentă cu fiecare dintre relațiile

$$\operatorname{tg} B\cdot\operatorname{tg} C=3, \tag{2}$$

$$\cos(B-C)=2\cos A. \tag{3}$$

2°. Fiind dat A, să se calculeze B și C. Discuție.

3°. Cunoscînd latura a și suma celorlalte două laturi $b+c$, să se rezolve triunghiul. Discuție.

4°. Să se studieze variația funcției $\cos B+\cos C$, cînd unghiul A variază între valorile găsite mai sus și care asigură existența triunghiului.

● **23**** Într-un plan P se consideră triunghiul ABC și centrul O al cercului său circumscris.

1°. Ce relație trebuie să existe între unghiurile A și B, astfel ca latura AB să treacă prin mijlocul razei OC?

2°. Presupunînd că este satisfăcută relația precedentă, se cere să se calculeze unghiurile triunghiului, cunoscînd unghiul pe care îl face mediana CM cu latura AB.

● **24.** Se consideră dreptunghiul $OABC$ avînd laturile OA și OC pe două axe fixe Ox, Oy și diagonala OB constantă. Prin B ducem o perpendiculară pe diagonala AC și pe această perpendiculară purtăm spre exterior segmentul $BM=AC$. Coborîm din M, $MP\perp Ox$.

1° Să se calculeze în funcție de unghiul $\widehat{AOB}=\alpha$ volumul V generat de trapezul $ABMP$ precum și volumul V_1 generat de triunghiul ABC, cînd figura face o rotație completă în jurul lui Ox.

2° Punînd $\operatorname{tg}\alpha=t$, să se exprime în funcție de t raportul $\dfrac{V}{V_1}$ și să se studieze variația sa cînd B parcurge sfertul de cerc DE.

3° Să se afle locul geometric al punctului M.

● **25.** Considerăm relația:

$$6z^2-3z\sin\theta+\cos\theta=0 \tag{1}$$

care leagă cele două variabile θ și z.

1°. z fiind un număr real dat, (1) este o ecuație în θ; să se determine valorile reale ale lui θ, soluții ale acestei ecuații, în funcție de z.

a) Să se calculeze efectiv aceste valori pentru

$$z=\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{și} \quad z=-\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

b) Să se discute în raport de z existența soluțiilor acestei ecuații.

2°. θ fiind un număr real dat, (1) este în acest caz o ecuație în z; să se găsească valorile reale și complexe ale lui z, soluții ale acestei ecuații.

Să se determine valorile lui θ pentru care (1) are:

a) o rădăcină dublă.

b) două rădăcini reale și distincte.

c) două rădăcini complexe.

● **26.** Considerăm ecuația

$$x^2+px+q=0$$

ale cărei rădăcini le notăm $x_1=\operatorname{tg} a$, $x_2=\operatorname{tg} b$. Se cere:

1° Să se găsească ce relație trebuie să existe între p și q pentru ca să avem $a+b=\frac{\pi}{3}$.

2° Să se formeze ecuația de gradul II care are ca rădăcini $\operatorname{tg} 2a$ și $\operatorname{tg} 2b$.

● **27.** Două cercuri O și O' sînt tangente interior în punctul A. Printr-un punct M de pe tangenta lor comună, ducem tangentele MB și MB' la cele două cercuri. Notînd razele cercurilor cu R și R' $(R>R')$ și cu x lungimea AM:

1° Să se calculeze $\operatorname{tg}\frac{\widehat{B'MB}}{2}$ în funcție de R, R' și x.

2° Să se determine x astfel încît unghiul $\widehat{B'MB}$ să fie egal cu un unghi dat α. Să se verifice că pentru ca problema să admită soluții, trebuie ca să avem

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\leqslant\frac{R-R'}{\sqrt{RR'}}.$$

3° Care este punctul M de pe tangenta comună pentru care unghiul $\widehat{B'MB}$ este maxim?

● **28.** Se dă ecuația:

$$x^2-2x\sin\varphi+(2-\sqrt{3})(1-4\cos^2\varphi)=0$$

în care x este necunoscuta și φ un unghi cuprins între 0 și 2π.

1°. Să se demonstreze că această ecuație admite două rădăcini reale x' și x'' oricare ar fi φ. Să se calculeze φ astfel ca una din rădăcini să fie egală cu zero.

2°. Să se găsească o relație între x' și x'' independentă de φ.

3°. Se dau două semidrepte orientate, fixe, de origine comună O. Ox și Oy, care formează între ele un unghi egal cu $\frac{\pi}{6}$, considerăm φ astfel ca x' și x'' să fie pozitive. Luăm pe Ox un punct A și pe Oy un punct B astfel ca $OA=x'$ și $OB=x''$. Să se calculeze lungimea AB.

● **29.** Să se afle laturile și unghiurile unui triunghi ABC cunoscînd

1°. $a=2$ cm, $b=3$ cm, $c=4$ cm;

2°. $a=2$ cm, $c=4$ cm, $B=46°34'2{,}87''$;

3°. $a=2$ cm, $B=46°34'2{,}87''$, $C=104°28'39''$;

4°. $a=2$ cm, $c=4$ cm, $A=28°57'18{,}09''$;

5°. $a=1$ cm, $c=4$ cm, $A=28°57'18{,}09''$;

6°. $a=5$ cm, $c=4$ cm, $A=28°57'18{,}09''$.

● **30**** Se consideră mulțimea triunghiurilor ABC a căror bază $BC=a$ este fixă în mărime și poziție și a căror laturi b și c satisfac relația

$$2a^2=b^2+c^2.$$

1° Să se găsească locul geometric al vîrfului A.

2° B', C' și G fiind respectiv mijloacele laturilor b și c și centrul de greutate al triunghiului ABC, să se demonstreze că patrulaterul $AB'GC'$ este inscriptibil.

3° Să se demonstreze că cercurile ABG, ACG sînt tangente la latura BC.

4° Să se arate că cercul care trece prin A și prin picioarele bisectoarelor interioare și exterioare ale unghiului A, trece de asemenea prin G.

5° Suma pătratelor medianelor triunghiului ABC este constantă.

6° $2\operatorname{ctg} A = \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C.$

7° $2a^2 \operatorname{ctg}^2 A = b^2\operatorname{ctg}^2 B + c^2\operatorname{ctg}^2 C.$

8° $2AH^2 = BH^2 + CH^2.$

9° $$S = \frac{a^2}{4 \operatorname{ctg} A} = \frac{1}{4}\sqrt{4b^2c^2 - a^2}.$$

10° h_a, h_b, h_c fiind înălțimile triughiului, avem

$$(AH \cdot h_a) + (HB \cdot h_b) + (CH \cdot h_c) = \text{constant}.$$

11° A_1, B_1, C_1 fiind proiecțiile lui G pe laturile a, b, c, să se calculeze laturile și suprafața triunghiului $A_1B_1C_1$ în funcție de a, b, S și să se arate că acest triunghi este isoscel.

● **31*** 1°. Să se arate că există identități de forma:

$$\frac{1}{\sin \alpha} = A \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + B \operatorname{ctg} \alpha$$

$$\operatorname{tg} \alpha = C \operatorname{ctg} \alpha + D \operatorname{ctg} 2\alpha$$

și să se afle valoarea numerică a coeficienților A, B, C, D.

2°. Cu ajutorul formulelor precedente, să se calculeze sumele

$$S_1 = \frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\sin 2\alpha} + \ldots + \frac{1}{\sin 2^n\alpha}$$

$$S_2 = \operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{2}\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{tg} \frac{\alpha}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n}\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2^n}$$

3°. Să se demonstreze că expresia $2^n \sin \frac{\alpha}{2^n}$ are ca limită pe α cînd numărul n tinde spre infinit.

4°. Folosind formula evidentă

$$\cos \frac{\alpha}{2^n} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2^{n-1}}}{2 \sin \frac{\alpha}{2^n}}$$

să se afle limita produsului $\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2^2} \ldots \cos \frac{\alpha}{2^n}$ cînd numărul n tinde spre infinit.

● **32*.** Notînd cu M,N,P, proiecțiile centrului de greutate G al triunghiului ABC pe laturile a, b, c, ale acestui triunghi, să se calculeze aria triunghiului MNP în funcție de laturile și aria S a triunghiului ABC.

● **33.** Se dau trei cercuri, tangente exterior două cîte două, (O_1), (O_2), (O_3), de raze R_1, R_2, R_3. Fie I centrul lor radical.

1°. Să se calculeze distanța de la punctul I la dreptele care unesc două cîte două, centrele acestor cercuri și unghiurile sub care se văd din acest punct segmentele limitate de centre.

2°. Să se calculeze aria triunghiului curbiliniu cuprins între cele trei cercuri.

3°. Aplicație numerică: $R_1=1$ cm; $R_2=2$ cm; $R_3=3$ cm.

● **34**** Se consideră, într-un plan, un triunghi ABC, ale cărui vîrfuri B și C sînt fixe ($BC=a$) iar vîrful A variabil, unghiul A păstrînd o valoare constantă dată. Notăm cu I_1 și I_2 centrele cercurilor exînscrise triunghiului în unghiurile $\hat{B}$ și $\hat{C}$.

1°. Să se calculeze în funcție de unghiul $\hat{A}$ unghiurile $\widehat{BI_1C}$ și $\widehat{BI_2C}$; să se determine locul geometric al punctelor I_1 și I_2 cînd vîrful A se deplasează.

2°. Să se calculeze în funcție de a, A, B și C laturile și diagonalele patrulaterului BCI_1I_2 și să se verifice relația:

$$BI_1 \cdot CI_2 = BC \cdot I_1I_2 + CI_1 \cdot BI_2.$$

● **35*** Se consideră un trapez $ABCD$ în care se notează înălțimea cu x, baza mică cu y și $\alpha = \sphericalangle DAB$, $\beta = \sphericalangle CBA$, unghiurile ascuțite de la baza mare.

1°. În funcție de x, y, α și β să se calculeze aria S a trapezului și suma $z=AD+DC+CB$.

2°. Presupunînd constante S, α și β, să se exprime z în funcție de x și să se scrie rezultatul sub forma $z=\dfrac{S}{x}+kx$, unde k este o constantă. Să se construiască curba reprezentativă.

3°. Presupunînd în continuare S, α și β constante, peste tot se dă în continuare lui x valoarea care face minimă funcția z. Să se calculeze valoarele zx, $\dfrac{z}{x}$, $\dfrac{y}{x}$ $\left(\text{pentru ultima se găsește } \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}\right)$. Să se calculeze distanța la latura DC a punctului O de întîlnire al bisectoarelor unghiurilor D și C ale trapezului. Să se deducă de aici că trapezul este circumscris unui cerc al cărui centru este situat pe baza mare.

● **36.** În planul (P) se dau două cercuri concentrice, de raze r și R. Se cere:

1°. În planul (P) să se găsească punctele egal depărtate de cele două cercuri și de două drepte din acest plan. Discuție.

2°. Să se afle locul geometric al punctelor din spațiu egal depărtate de cele două cercuri și de cele două drepte. Discuție.

3°. Dacă A este o extremitate a unui diametru al cercului de rază R și B este una dintre intersecțiile acestuia cu cercul de rază r, să se afle locul geometric al punctelor din spațiu al căror raport al distanțelor este $\frac{AM}{MB}=K$.

4°. În cazul particular $R=2r$, ce devin locurile geometrice căutate.

● **37.** Dîndu-se triunghiul ABC, se cere:

1°. Locul geometrie al punctelor din plan de unde cercul înscris în triunghi se vede sub un unghi de 60°.

2°. Să se afle locul geometric al punctelor din spațiu egal depărtate de vîrfurile triunghiului.

3°. Să se afle raza sferei care trece prin vîrfurile triunghiului și printr-un punct P situat pe perpendiculara pe planul triunghiului, piciorul ei fiind în centrul O al cercului circumscris triunghiului.

● **38.** 1°. Fiind dată sfera O, de rază R, și M un punct fix, să se găsească locul geometric al mijloacelor coardelor sferei care trec prin M. Discuție.

2°. Să se afle locul geometric al mijloacelor coardelor sferei care sînt paralele cu dreapta care trece prin centrul sferei și prin M.

3°. Să se afle locul geometric al punctelor din spațiu egal depărtate de sfera O cu distanța d. Discuție.

4°. Să se afle locul geometric al punctelor din spațiu de unde sfera O poate fi văzută sub un unghi dat, 2α

● **39.** În planul (P) se dau două cercuri, O_1 și O_2, de raze R_1 și R_2 și distanța centrelor lor d. Se cere:

1°. Să se afle locul geometric al punctelor din planul (P) care au puteri egale față de cele două cercuri. Discuție.

2°. Cînd cele două cercuri se rotesc în jurul liniei centrelor lor, se obțin două sfere. Să se afle locul geometric al punctelor din spațiu care au puteri egale față de cele două sfere.

3°. Dacă punctele A și B sînt exterioare planului (P), să se afle locul geometric al punctelor din spațiu care au puteri egale față de cele două sfere și sînt egal depărtate de punctele A și B.

4°. Să se afle locul geometric al punctelor din spațiu care au puteri egale față de cele două sfere și de unde segmentul AB se vede sub un unghi drept.

5°. Să se afle locul geometric al punctelor din spațiu de unde distanța centrelor se vede sub un unghi α și sînt egal depărtate de punctele A și B.

● **40**** Se dau două puncte A, B și un plan P și se consideră dreapta mobilă Δ dusă prin B paralel cu planul P. Se cere:

1°. Locul geometric al proiecției C a lui A pe Δ;

2°. Locul descris de centrul cercului circumscris triunghiului ABC;

3°. Locul mijlocului m al lui BC;

4°. Locul centrului de greutate al triunghiului ABC;

5°. Locul centrului G al distanțelor proporționale ale punctelor A, B, C, afectate de coeficienții α, β, γ, pozitivi sau negativi, a căror sumă $\mu=\alpha+\beta+\gamma$ nu este nulă. Caz particular $\alpha=\beta=\gamma$;

6°. Intersecția conului generat de AC și a conului descris de mediana ce pleacă din punctul B din triunghiul ABC. Care sînt proiecțiile acestei intersecții pe planul P și pe planul dus prin AB perpendicular pe planul P?

● **41*** Se dă un con de rotație (Γ) cu vîrful în S, al cărui cerc de bază are raza r și a cărui generatoare are lungimea $r\sqrt{3}$. Se circumscrie cercului de bază un triunghi ABC.

1°. Presupunînd triunghiul ABC echilateral să se calculeze volumul tetraedrului $SABC$. Să se arate că dreptele SA, SB și SC formează un triedru tridreptunghic.

2°. Dacă triunghiul ABC este oarecare, să se afle locul geometric al muchiilor triedrului suplimentar triedrului $SABC$, deci un triedru $SA'B'C'$ cu muchiile perpendiculare pe fețele triedrului dat. Să se afle volumul cuprins între planul bazei conului, suprafața laterală a conului și locul geometric găsit.

3°. Să se calculeze raza ρ a sferei înscrisă în conul (Γ) și cu aproximație de 0,001 raportul ariilor determinate în această sferă de cercul de contact dintre con și sferă.

● **42*** Se dă un plan fix (P) și două puncte fixe, A și B, așezate de aceeași parte a planului (P) și se presupune dreapta AB neparalelă cu planul. Se consideră mulțimea sferelor (S) care trec prin A și B și sînt tangente la planul (P). Se cere:

1°. Să se afle locul geometric descris de punctul de contact dintre sfera (S) și planul (P).

2°. Să se afle locul geometric descris de centrul sferei (S).

3°. Să se determine acele dintre sfere care au raza maximă sau minimă.

● **43.** Două sfere concentrice au centrul în O și razele $R_1<R_2$. Se cere:

1°. Locul geometric al punctelor din spațiu egal depărtate de cele două sfere.

2°. Dacă A și B sînt două puncte oarecare, să se afle locul geometric al punctelor din spațiu egal depărtate de cele două sfere și de cele două puncte. Discuție.

3°. Dacă A, B și C sînt trei puncte necolinare, să se afle locul geometric al punctelor din spațiu egal depărtate de cele două sfere și de cele trei puncte (necoliniare).

4°. Care este condiția ca în sfera cu raza R_2 să se înscrie un con circular drept, în care sfera de rază R_1 să fie înscrisă. Se cere aria și volumul conului, în funcție de R_1 și R_2.

● **44*** Se dau sferele O_1 și O_2, de raze R_1 și R_2 și distanța centrelor lor, d. Se cere:

1°. Locul geometric al punctelor din spațiu de unde sfera O_1 se vede sub un unghi drept și care mai au proprietatea că suma distanțelor la centrele celor două sfere este constantă, d_1.

2°. Locul geometric al punctelor din spațiu de unde sfera O_2 se vede sub unghi drept și care mai au proprietatea că diferența distanțelor la centrale celor două sfere să fie constantă și egală cu d_2.

3°. Locul geometric al punctelor din spațiu care se bucură de proprietatea că raportul distanțelor lor la centrele celor două sfere este constant, K, și se află egal depărtate de două plane date. Discuție.

● **45*** În planul (P) se consideră două cercuri concentrice, de raze r și R, cu centrul în O. Se cere:

1°. Locul geometric al punctelor din spațiu egal depărtate de cele două cercuri și de două plane date. Discuție.

2°. Locul geometric al punctelor din spațiu egal depărtate de cele două cercuri și la distanța d_1 de o dreaptă (Δ).

3°. Locul geometric al punctelor din spațiu egal depărtate de cele două cercuri și la distanța d_2 de o sferă (Σ). Discuție.

● **46.** Fie triunghiul ascuțitunghi ABC și AA', BB', CC' înălțimile sale. Considerăm

$$x=BA',\ x'=CA',\ y=CB',\ y'=AB',\ z=AC',\ z'=BC'.$$

1°. Să se arate că $x=c\cdot\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2a}$ și să se calculeze în mod asemănător y, z, x', y', z'.

2°. Muchiile paralelipipedelor dreptunghice (P) și (P') sînt respectiv egale cu x, y, z și x', y', z'. Să se compare diagonalele lor.

3°. Fie $2p$, $2P$, $2P'$ perimetrele respective ale triunghiului și a celor două paralelipipede, S și S' ariile totale ale lui (P) și (P'). Să se arate că $S-S'=p(P-P')$.

4°. Aplicație numerică: $a=32$ cm, $b=40$ cm, $c=48$ cm. Să se calculeze lungimile segmentelor x, y, z, x', y', z' pentru acest triunghi și să se verifice rezultatele obținute.

● **47**** Se consideră piramida regulată cu baza un pătrat, de latură $2a$ și pe care o notăm cu $SABCD$. Fețele laterale fac cu planul bazei unghiul α. Prin muchia de bază AB se duce un plan variabil (P) care determină secțiunea $AMNB$. Planul dus prin înălțimea SO perpendicular pe AB taie dreptele AB în I, CD în K și pe MN în F. Se notează cu H proiecția punctului F pe IK și se ia $x=IH$.

1°. Să se exprime aria secțiunii $AMNB$ în funcție de a, α și x și pe care o notăm cu Σ. Ce condiție trebuie să îndeplinească $\cos\alpha$ pentru ca funcția $y=\Sigma^2$ să aibă un maxim și un minim cînd x variază?

Dacă această condiție este îndeplinită, fie x' și x'' cele două valori ale lui x care corespund la maximul și minimul lui y. Să se arate că dacă x'/a și x''/a sînt raționale și dacă $\operatorname{tg}\alpha$ este întreg atunci obligatoriu $\operatorname{tg}\alpha=3$.

Să se studieze în acest caz variația lui y.

2°. Revenind le cazul general, să se determine punctele de intersecție al înălțimii SO cu planele (P') și (P'') care corespund maximului și minimului lui y.

Să se studieze în mod special cazul $\operatorname{tg}\alpha=3$.

Să se calculeze, în cazul general, unghiul pe care-l face cu planul bazei, planul bisector al diedrului format de planele (P') și (P'').

● **48*** Fiind date două drepte Δ_1, Δ_2, să se determine trei arce de cerc tangente exterior $AMNB$, tangentele în A și B făcînd cu Δ_1, respectiv Δ_2, unghiurile α și β. Cunoscînd punctele A, B și razele R_1, R_2, R_3 ale celor trei arce de cerc, să se dea o construcție geometrică pentru centrele celor trei cercuri. Aceeași problemă pentru cazul cînd arcele de cerc sînt tangente interior, sau cînd într-un punct de tangență arcele sînt tangente exterior, iar în celălalt sînt tangente interior.

● **49.** Fie tetraedrul regulat $ABCD$ cu muchia a.

1° Să se calculeze înălțimea AO.

2° Să se determine poziția centrului I al sferei circumscrise tetraedrului.

● **50**** Se consideră un cub $ABCDEFGH$, cu centrul în O de muchie $2a$ și se notează cu M centrul feței $EFGH$. În planul $EFGH$ se consideră punctul S așa fel ca $SG=SH$, $OG=OS=OH$ punctele M și S fiind de o parte și de alta a feței $CDHG$.

1°. Să se ducă la sfera (Σ) înscrisă în cub tangenta din S care să fie cuprinsă în planul perpendicular pe MH și care trece prin S.

2°. Să se demonstreze că această tangentă întîlnește diagonala GB a feței $BCGF$ într-un punct K. Să se calculeze în funcție de a distanțele KG, KS și KO.

3°. Să se dovedească, că dreapta KO întîlnește muchia GH într-un punct U și să se calculeze distanța UG în funcție de a.

4°. La sfera (Σ) se duce tangenta paralelă cu GB, situată în planul OSM și de aceeași parte cu S față de OM. Ea taie pe SM în V. Să se calculeze distanța de la V la fața $CDGH$ și să se compare cu distanța de la punctul K pînă la aceeași față.

● **51**** Fie SA și SB două generatoare ale unui con de rotație, care determină un plan ce trece prin axa conului (raza cercului de bază este r, deci $AB=2r$). În planul ASB, prin A se duce un segment de dreaptă AC, care întîlnește în C pe SB, și prin mijlocul lui AC, notat cu M, o perpendiculară pe planul ASB, care întîlnește suprafața conului în punctele D și E. Să se studieze variația produsului $P=AC\times DE$, cînd C se deplasează de la B la S $(\widehat{BAS}=\alpha)$. Să se discute în raport cu α. Să se reprezinte curbele în cazurile cînd

$$\alpha>\frac{5\pi}{12};\quad \alpha=\frac{5\pi}{12};\quad \alpha<\frac{5\pi}{12}.$$

● **52*** Se consideră tetraedrul $OABC$ definit de lungimea comună l a muchiilor OA, OB, OC și de măsura unghiurilor $\widehat{AOB}=\widehat{AOC}=\frac{\pi}{2}$ și $\widehat{BOC}=\alpha$.

1°. Să se calculeze în funcție de α, măsurile diedrelor și a unghiurilor fețelor triedrului $OABC$.

2°. Să se calculeze în funcție de l și de α aria și razele R, r, r_a, r_b, r_c corespunzătoare triunghiului ABC.

3°. Să se determine pentru ce valori ale lui α razele celor patru cercuri înscris și exînscrise sînt legate prin relația

$$r_a+r_b+r_c-Kr=0,$$

unde K este un număr dat. Să se stabilească condițiile de posibilitate.

● **53.** 1°. În sfera de rază R, cu centrul în punctul O, să se ducă o secțiune paralelă cu un plan dat și al cărui diametru este dinainte dat.

2°. În funcție de raza sferei, R, să se calculeze aria și volumul prismei hexagonale regulată, dreaptă, înscrisă în sferă și care are ca bază planul secțiunii făcute.

3°. Să se calculeze ariile calotelor sferice determinate de planele fețelor prismei.

4°. Să se calculeze unghiul făcut de planul bazei acelei prisme cu un plan care trece prin două muchii opuse ale bazelor.

● **54**** În planul (P) se dau două cercuri oarecare (C_1) și (C_2), care sînt bazele a două conuri drepte, de aceeași înălțime h și vîrfuri S_1, S_2. Se taie cele două conuri cu un plan variabil (Q), care este paralel cu planul (P). Se determină în acest fel două cercuri (γ_1) și (γ_2).

1°. Să se afle locul geometric al centrelor de omotetie a celor două cercuri (γ_1) și (γ_2), cînd planul (Q) variază.

2°. Presupunînd că cercurile (C_1) și (C_2) se intersectează, să se determine regiunea spațiului în care poate varia (Q) pentru ca cercurile (γ_1) și (γ_2) să aibă puncte comune. Se notează cu M unul din aceste puncte. Se cere locul geometric descris de proiecția lui (notată cu m) pe planul (P) cînd planul (Q) variază.

3°. În planul (P) se duce dreapta (Δ) paralelă cu linia centrelor cercurilor (C_1) și (C_2) și care întîlnește în punctul E_1 arcul de pe cercul (C_1) cuprins în cercul (C_2) și în E_2 arcul de pe cercul (C_2) cuprins în (C_1). Generatoarele S_1E_1 și S_2E_2 se taie în N. Să se afle locul geometric descris de proiecția n, a lui N pe planul (P) cînd dreaptă (Δ) variază.

● **55*** Un triunghi variabil ABC are ca ortocentru punctul fix H și este înscris într-un cerc dat, cu centrul în O. Să se afle locul geometric descris de mijloacele laturilor acestui triunghi.

● **56.** Fie cercul fix cu centrul în punctul O și A un punct fix al lui. Pe dreapta OA se ia punctul M și se definesc pe cerc punctele P și Q, astfel ca să avem $\widehat{AOP}=\alpha$, $\widehat{AOQ}=\beta$ cu condiția $0<\alpha<\beta<\pi$.

1°. Să se exprime raportul pătratelor distanțelor de la M la P și Q în funcție de distanța $OM=x$ și de raza cercului R, deci $y=\dfrac{MP^2}{MQ^2}$. Să se studieze variația lui y cînd M descrie dreapta OA.

2°. Să se reprezinte grafic această variație și să se deducă numărul punctelor M de pe dreapta OA așa fel ca raportul $\dfrac{MP}{MQ}=K>0$. Dacă sînt două puncte, M și M', care satisfac această condiție, cum sînt ele așezate față de centrul cercului O?

3°. Să se determine valoarea produsului $OM\cdot OM'$. În ce puncte de pe dreapta OA, punctele M și M' sînt confundate?

● **57.** Se dă un semicerc de diametru $AB=2R$, cu centrul în punctul O. Pe raza perpendiculară în O pe AB se duce segmentul $OC=$

$=2R$ și se unește C cu A și B. Figura se rotește în jurul lui OC obținîndu-se o emisferă și un con de rotație.

Pe OC se ia un punct M așa fel ca $OM=x<R$ și prin M se duce planul perpendicular pe OC. Acest plan taie conul și emisfera după două cercuri.

1°. Să se calculeze aria S a coroanei circulare cuprinsă între cele două ceruri.

2°. Să se studieze cum variază S cînd x crește de la 0 la R. Să se reprezinte grafic variația.

3°. Să se determine valorile lui x pentru care S ia o valoare dată $m\pi R^2$. Să se recunoască pentru ce valori ale lui m problema admite 0, 1, 2 sau 3 soluții.

4°. Pentru ce valoare a lui m cele trei valori corespunzătoare pentru x sînt în progresie aritmetică?

● **58**** Se intersectează laturile AB, AC ale unui triunghi ABC, printr-o paralelă DE la latura BC (D și E sînt respectiv pe AB și AC). Din punctele D și E construim tangentele DT și ES la cercul circumscris triunghiului ABC. Să se demonstreze că BS și CT se intersectează într-un punct aflat pe bisectoarea unghiului A.

● **59.** Să se construiască un triunghi ABC cînd se cunosc:

1°. Latura $BC=a$ și cele două mediane ce pleacă din extremitățile acestei laturi: m_b și m_c.

2°. Cele trei mediane: m_a, m_b, m_c.

● **60.** Să se construiască un triunghi ABC cînd se cunosc:

1° Latura $BC=a$, înălțimea corespunzătoare acestei laturi, h_a, și unghiul A opus laturii.

2°. Latura $BC=a$, unghiul B așezat pe latură și R, raza cercului circumscris.

3°. Latura $BC=a$, unghiul opus acestei laturi, A, și raza cercului înscris, r.

SOLUȚII

Capitolul I.
GEOMETRIE PLANĂ

● **1.** 1° Avem $\Delta ADC = \Delta ABE$ (Fig. 1.1), deoarece $AB = AD$, $AC = AE$ și $\widehat{EAB} = \widehat{CAD}$, deci $BE = DC$. În mod analog $\Delta BDC = \Delta ABF$, deci $DC = AF$, așa încît $AF = BE = DC$. 2° Notînd cu O punctul de intersecție al dreptelor CD și BE, patrulaterele $AOBD$ și $AOCE$ sînt inscriptibile, căci de mai sus avem $\widehat{AEO} = \widehat{ACO}$ și $\widehat{OAB} = \widehat{ODB}$. Rezultă $\widehat{AOC} = \widehat{AOB} = 120°$, ca fiind suplimentele unor unghiuri de 60°. Notînd cu O_1 punctul de intersecție al dreptelor CD și AF, avem analog $\widehat{AO_1B} = \widehat{BO_1C} = 120°$. Rezultă $\widehat{AOB} = \widehat{AO_1B}$. Cum O și O_1 sînt de aceeași parte a dreptei AB, punctele O și O_1 coincid, deci dreptele AF, BE și CD sînt concurente. ● **2.** Triunghiul CBD este isoscel deci, $BD = BC$ și de asemenea triunghiul CBN este isoscel așa că $BC = BN$ (Fig. 1.2). Rezultă că și ΔDBN este isoscel și cum $\sphericalangle NBD = 60°$, triunghiul DBN este echilateral. Triunghiul BDM este isoscel, căci unghiurile din B și M sînt de 40°. Rezultă $BD = DM = DN$, așa că triunghiul DMN este isoscel și avem $\sphericalangle DMN = 70°$, deci $\sphericalangle AMN = 110°$. ● **3.** Notăm cu

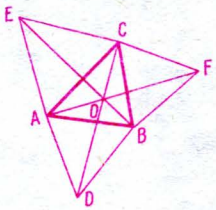


Fig. 1.1

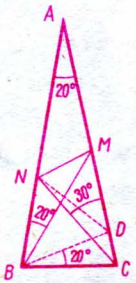


Fig. 1.2

AA' și AH, bisectoarea interioară și înălțimea corespunzătoare unghiului A (Fig. 1.3), precum și $\widehat{A'AH}=\alpha$, $\widehat{BIC}=\beta$, $\widehat{BI'C}=\gamma$, unde I este centrul cercului înscris triunghiului ABC, iar I' centrul cercului exînscris, corespunzător unghiului A. 1° Avem $\alpha=|\widehat{BAH}-\widehat{BAA'}|=\left|\frac{\pi}{2}-\hat{B}-\right.$ $\left.-\frac{1}{2}(\pi-\hat{B}-\hat{C})\right|=\frac{|\hat{C}-\hat{B}|}{2}$. 2° $\beta=\pi-\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}=\frac{\pi}{2}+\frac{\hat{A}}{2}$. Patrulaterul $BICI'$ este inscriptibil, deci $\gamma=\frac{\pi}{2}-\frac{\hat{A}}{2}$. ● **4.** 1° Punctul I de intersecție al dreptelor BD și CE se găsește pe cercul circumscris triunghiului

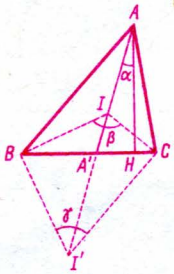


Fig. 1.3

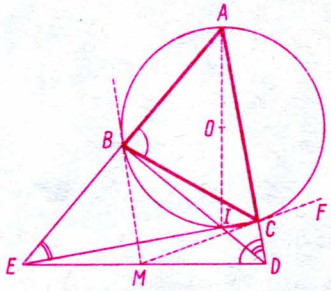


Fig. 1.4

ABC cu centrul în punctul O, căci $\widehat{ABI}$ și $\widehat{ACI}$ sînt drepte (Fig. 1.4). Triunghiurile ABC și ADE au unghiul A comun. Patrulaterul $BCDE$ este inscriptibil ($\widehat{CDB}=\widehat{BEC}$), de unde rezultă că $\widehat{CDE}+\widehat{EBC}=180°$. Cum și $\widehat{ABC}+\widehat{EBC}=180°$ rezultă că $\widehat{ABC}=\widehat{ADE}$, deci triunghiurile ABC și ADE sînt asemenea avînd două unghiuri respectiv egale. 2° M fiind mijlocul lui ED, CM este mediană în triunghiul dreptunghic ECD deci $EM=MC=MD$. Avem apoi $\widehat{MCD}=\widehat{MDC}=\widehat{ACF}=\widehat{ABC}$, de unde rezultă că MC este tangentă la cercul cu centrul în O în punctul C (§2.3). Analog se arată că și MB este tangentă în B la același cerc. 3° $\frac{BC}{DE}=\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}=\frac{1}{2}$, deci $\widehat{AEC}=\widehat{ADB}=30°$ și $\hat{A}=60°$. Dacă $\hat{A}=60°$, rezultă $BC=R\sqrt{3}$ (R raza cercului circumscris triunghiului $\widehat{ABC}$ și $BOC=120°$). ● **5.** 1° Avem (Fig. 1.5)

$\widehat{BMN}=\frac{\pi}{2}+\widehat{NMH}=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\widehat{HAN}$, $\widehat{ACB}=\frac{\pi}{2}-\widehat{NMH}=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\widehat{HAN}$, deci patrulaterul este inscriptibil. 2° Avem aria $BMNC$=aria ABC—aria AMN=aria ABC — aria AHN, căci triunghiurile AMN și AHN sînt egale, deoarece $\widehat{AMN}=\widehat{AHN}$. Triunghiul ABC este asemenea cu triunghiul AHN, căci $\widehat{HAN}=\hat{B}$. Raportul ariilor lor este AH^2/BC^2. Prin urmare

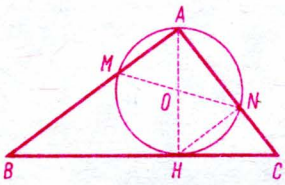


Fig. 1.5

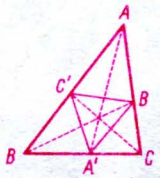


Fig. 1.6

$$\text{aria } BMNC=\text{aria } ABC-\text{aria } ABC\cdot\frac{AH^2}{BC^2}=\frac{AH(a^2-AH^2)}{2a}.$$

Dar $AH=a\sin B\cos B=\frac{a}{2}\sin 2B=\frac{a}{2}x$, unde am notat $x=\sin 2B$. Avem deci

$$\text{aria } BMNC=\frac{a^2x(4-x^2)}{16}.$$

Raportul dintre această arie și aria cercului cu diametrul AH este $k=\frac{4-x^2}{\pi x}$ $(k>0)$, sau $f(x)\equiv x^2+k\pi x-4=0$. Parametrul k trebuie să fie astfel încît ecuația să aibă rădăcini în $[-1, 1]$. Comparînd rădăcinile acestei ecuații cu numerele -1 și 1 (Algebră, T IV, 2.2.2) se constată că trebuie să avem $k\geqslant\frac{3}{\pi}$, caz în care numai rădăcina cea mai mare corespunde. ● **6.** Dacă A', B', C' sînt picioarele bisectoarelor interioare, ale triunghiului ABC, atunci: aria $A'B'C'$=aria ABC — aria $AB'C'$—aria $BC'A'$—aria $CA'B'$. Lungimea bisectoarelor este dată de $(AA')^2=\frac{4bcp(p-a)}{(b+c)^2}$ (Fig. 1.6). ● **7.** 1°. Notăm cu α' simetricul lui α față

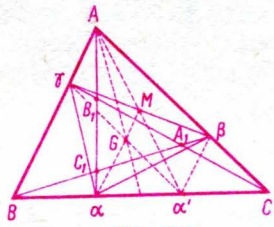


Fig 1.7

de mijlocul laturii BC și cu M mijlocul lui $A\alpha'$. Triunghiurile ABC și $A\alpha\alpha'$ au același centru de greutate G, care se află pe αM așa fel că $\alpha G = 2GM$ (Fig. 1.7). Dar $\frac{\alpha' C}{\alpha C} = \frac{\alpha B}{\alpha C} = \frac{\gamma A}{\gamma B} = \frac{BC}{BA}$ deci punctele α' și β împart în același raport laturile BC și AC, deci $\alpha'\beta \| AB$ și analog $\alpha'\gamma \| AC$. Patrulaterul $A\gamma\alpha'\beta$ este paralelogram și diagonalele lui au același mijloc M deci acesta este și mijlocul lui $\beta\gamma$. Rezultă că centrul de greutate al lui $\alpha\beta\gamma$ este același punct G de pe αM. 2° În triunghiul ABC se aplică relația lui Stewart față de punctul α de pe BC și putem scrie

$$A\alpha^2 = a'^2 = b^2 \frac{p}{p+q} + c^2 \frac{q}{p+q} - a^2 \frac{pq}{(p+q)^2}$$

și alte două formule analoage. Rezultă

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = (a^4 + b^4 + c^4) \left[\frac{p^2+pq+q^2}{(p+q)^2}\right]^2.$$

Avem apoi (§3.1.5)

$$16S'^2 = 2(a'^2b'^2 + b'^2c'^2 + c'^2a'^2) - (a'^4 + b'^4 + c'^4) =$$

$$= \frac{(p^2+pq+q^2)^2}{(p+q)^4}\left[(a^2+b^2+c^2)^2 - 2(a^4+b^4+c^4)\right] = 16S^2 \frac{(p^2+pq+q^2)^2}{(p+q)^4}.$$

Prin urmare

$$\frac{S'}{S} = \frac{p^2+pq+q^2}{(p+q)^2} = \frac{\sqrt{a'^4+b'^4+c'^4}}{\sqrt{a^4+b^4+c^4}} = \frac{a'^2+b'^2+c'^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

3° Dacă triunghiul $AB\alpha$ îl tăiem cu transversala $\gamma B_1 C$ și aplicăm teorema lui Menelaus, avem

$$\frac{[\gamma B]}{[\gamma A]} \cdot \frac{[B_1 A]}{[B_1 \alpha]} \cdot \frac{[C\alpha]}{[CB]} = 1,$$

dar cum

$$\frac{[\gamma B]}{[\gamma A]} = -\frac{q}{p} \text{ și } \frac{[C\alpha]}{[C\beta]} = \frac{q}{p+q}$$

deducem

$$\frac{AB_1}{B_1\alpha} = \frac{p(p+q)}{q^2} \text{ și } \frac{AB_1}{A\alpha} = \frac{p(p+q)}{(p^2+pq+q^2)}; \quad \frac{\alpha B_1}{\alpha A} = \frac{q^2}{p^2+pq+q^2}.$$

Repetînd raționamentul pentru triunghiurile βCB și $CA\gamma$, avem

$$\frac{p(p+q)}{p^2+pq+q^2}=\frac{AB_1}{A\alpha}=\frac{BC_1}{B\beta}=\frac{CA_1}{C\gamma}.$$

Tăind triunghiul $AC\alpha$ cu transversala βC_1B și aplicînd teorema lui Menelaus, se deduc

$$\frac{AC_1}{C_1\alpha}=\frac{q(p+q)}{p^2};\quad \frac{AC_1}{A\alpha}=\frac{q(p+q)}{p^2+pq+q^2};\quad \frac{\alpha C_1}{\alpha A}=\frac{p^2}{p^2+pq+q^2},$$

așa că

$$\frac{AB_1}{AC_1}=\frac{p}{q}\text{ și }\frac{\alpha B_1}{\alpha C_1}=\frac{q^2}{p^2}.$$

4° Avem

$$\frac{B_1C_1}{a}=\frac{B_1C_1}{A\alpha}=\frac{AC_1-AB_1}{A\alpha}=\frac{(p+q)(q-p)}{p^2+pq+q^2}=\frac{q^2-p^2}{p^2+pq+q^2}$$

și analog

$$\frac{C_1A_1}{b'}=\frac{A_1B_1}{c'}=\frac{q^2-p^2}{p^2+pq+q^2}$$

așa că triunghiurile $A_1B_1C_1$ și $A'B'C'$ sînt asemenea. ● **8.** 1°. Pentru că $AD=AB$ rezultă că $\widehat{ABD}=\widehat{BDA}=\hat{B}$; din $BE\perp AD$ urmează că $\widehat{DBE}=90°-\hat{B}=\hat{C}$ așa că $\Delta\ BFC$ este isoscel. 2°. Dacă N este piciorul perpendicularei din C pe AN, avem $\widehat{BCN}=\hat{C}$. 3°. Segmentul BD este baza triunghiului isoscel BAD, în care laturile sînt egale cu b și înălțimea $AP=\frac{bc}{a}$ așa că $BD=\frac{2b^2}{a}$ (Fig. 1.8). ● **9.** Triunghiurile ABQ și MBC sînt egale (Fig. 1.9) ca avînd două laturi și unghiul cuprins între ele respectiv egal. În plus laturile egale sînt două cîte două perpendiculare, deci MC și AQ sînt egale și perpendiculare. Laturile pătratu-

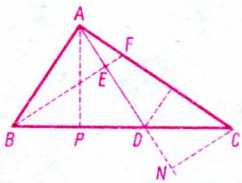


Fig. 1.8

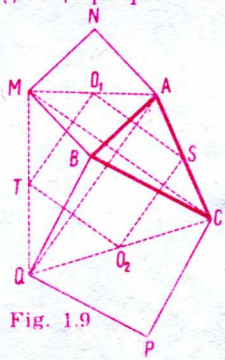


Fig. 1.9

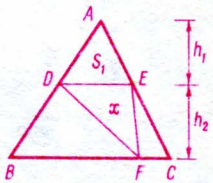


Fig. 1.10

lui O_1TO_2S sînt egale cu $\frac{1}{2}MC$. ● **10.** Într-un triunghi ABC, ducem o paralelă DE la baza BC și fie h_1, h_2 distanțele ei la punctul A și la baza BC (Fig. 1.10). F fiind un punct oarecare pe BC, notăm cu x aria triunghiului DEF. Avem

$$\frac{x}{S_1}=\frac{DE\cdot h_2}{DE\cdot h_1}=\frac{h_2}{h_1},\quad \frac{S}{S_1}=\frac{(h_1+h_2)^2}{h_1^2}\quad \text{deci } x+S_1=\sqrt{SS_1}.$$

● **11.** Notînd cu D punctul de intersecție al medianelor și $DF=x$, $DE=y$, cum AE este mediana unghiului drept, avem $EC=AE=3y$. Din triunghiurile dreptunghice CDE și ADF găsim $x^2=2y^2$, $x^2+y^2=\frac{1}{4}$, de unde $x=\frac{1}{\sqrt{6}}$, $y=\frac{1}{\sqrt{12}}$. Avem apoi $BC=\sqrt{3}$ și $AB=\sqrt{2}$ (Fig.1.11).

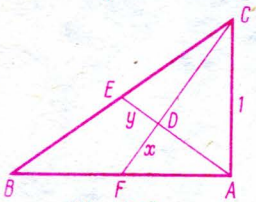


Fig. 1.11

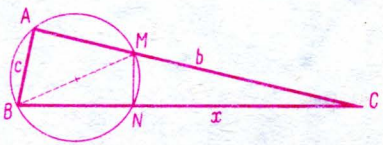


Fig. 1.12

● **12.** Notăm $NC=x$ (Fig. 1.12). Triunghiurile ABC și CMN sînt asemenea, deci conform ipotezei pentru ariile lor S și S_1, avem

$$2=\frac{S}{S_1}=\frac{b^2}{x^2}=\frac{c^2}{MN^2},$$

deci $x=\frac{b}{\sqrt{2}}$ și $MN=\frac{c}{\sqrt{2}}$. Aria căutată este $\frac{\pi BM^2}{4}=\frac{3a^2-2\sqrt{2ab}}{8}$.

● **13.** 1° Patrulaterele inscriptibile sînt (Fig. 1.13.a) $AFDC(\widehat{FCD}=\widehat{FAD})$, $ABED(\widehat{EBD}=\widehat{EAD})$, $BCEF(\widehat{FBE}=\widehat{ECF})$, $AFHE(\widehat{AFH}=\widehat{AEH}=90°)$, $BFHD(\widehat{BFH}=\widehat{BDH}=90°)$, $CDHE(\widehat{EDC}=\widehat{CEH}=90°)$. 2°, 3°. $\widehat{HDF}=\widehat{ECH}=\widehat{FBH}=\widehat{HDE}$, deci AD este bisectoarea unghiului $\widehat{FDE}$, $\widehat{FEH}=\widehat{FAH}=\widehat{HCD}=\widehat{HED}$, deci BE este bisectoarea unghiului $\widehat{FED}$, $\widehat{EFH}=\widehat{EAH}=\widehat{HBD}=\widehat{DFH}$, deci CF este bisectoarea unghiului $\widehat{EFD}$. În

cazul cînd triunghiul are un unghi obtuz (Fig. 1.13, b) înălțimile duse din vîrfurile unghiurilor ascuțite sînt bisectoare ale unghiurilor exterioare iar înălțimea corespunzătoare unghiului obtuz este bisectoare interioară. ● **14.** 1°. Cum unghiul exterior din O este de 120°, triunghiurile OPP' și OQQ' sînt echilaterale (Fig. 1.14). Din triunghiurile asemenea APM și AOB, notînd $OP=x$, avem

$$\frac{MP}{b}=\frac{AP}{a}=\frac{OA-OP}{a}=\frac{a-x}{a},$$

deci

$$MP=\frac{b(a-x)}{a} \text{ și } MP'=\frac{ab+x(a-b)}{a}.$$

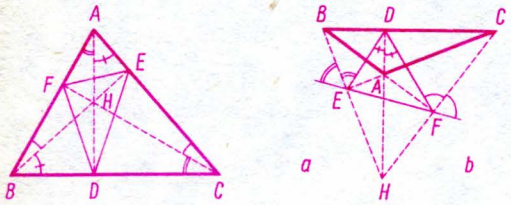


Fig. 1.13 a și b

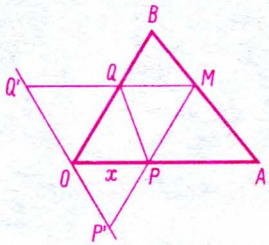


Fig. 1.14

Aria y a patrulaterului $PQQ'P'$ este diferența ariilor triunghiului echilateral $MP'Q'$ și a triunghiului MPQ

$$y=\frac{\sqrt{3}}{4a^2}\left[(a^2-ab+b^2)x^2-ab(2b-a)x+a^2b^2\right].$$

2°. Cînd M parcurge segmentul BA, x variază de la zero la a. Pentru capetele acestui interval, y ia valorile $\frac{b^2\sqrt{3}}{4}$ și $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Derivata funcției y se anulează pentru

$$x_1=\frac{ab(2b-a)}{2(a^2-ab+b^2)} \text{ și avem } y_m=\frac{3\sqrt{3}}{16}\cdot\frac{a^2b^2}{a^2-ab+b^2}.$$

Graficul funcției y este o parabolă convexă, căci coeficientul lui y^2 este pozitiv. Pentru ca extremul să fie în $(0, a)$, deci $0<x_1<a$, rezultă $b<2a<4b$. 3°. Avem $\cos \widehat{OPM}=-\frac{1}{2}$, deci $OM^2=OP^2+PM^2+$ $+2\cdot OP\cdot PM\,\frac{1}{2}=\frac{1}{a^2}\left[(a^2-ab+b^2)x^2-ab(2b-a)x+a^2b^2\right]=\frac{4}{\sqrt{3}}y$. Pentru $x=0, OM=OB=b$ și $y=\frac{b^2\sqrt{3}}{4}$; pentru $x=a$, $OM=OA$ și $y=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Valoarea cea mai mică a lui OM corespunde perpendicularei pe AB și se obține același minim y_m de mai sus. Pentru ca acest minim să existe, trebuie ca piciorul perpendicularei OM să fie pe AB. Pozițiile limită sînt: cînd AB este perpendiculară pe OA $(OB=2OA)$ sau pe OB $(OA=2OB)$. ● **15.** 1° Avem (Fig. 1.15) $\Delta DME=\Delta DAE$ (DE latură comună, $AE=EM$, $AD=DM$), deci $\sphericalangle DME=90°$. 2° În ΔAMC, $AM=MC$ așa că $\widehat{MAC}=$ $=\widehat{MCA}$, dar $\widehat{MAC}=\widehat{ADE}$ ca avînd laturile perpendiculare, deci $\widehat{ADE}=$ $=\hat{C}$. Avem apoi $\widehat{MCA}=\widehat{BAH}=\widehat{AFG}$ deci $\widehat{AFG}=\hat{C}$. Prin urmare $\widehat{ADE}=$ $\widehat{AFG}$, de unde rezultă că $FG\parallel DE$. ● **16.** Triunghiul ABD fiind isoscel, bisectoarea AH a unghiului A împarte BD în două segmente egale $BH=HD=\frac{BD}{2}$. Notăm $BH=HD=x$ și trasăm cercul înscris și cercul exînscris în unghiul A al triunghiului ABC. Fie O, O' centrele respective ale cercurilor și M, M' punctele de tangență cu AB (Fig. 1.16). $\Delta AHB\sim$ $\sim\Delta AMO\sim\Delta AM'O'$ ca avînd comun unghiul ascuțit A. Deducem

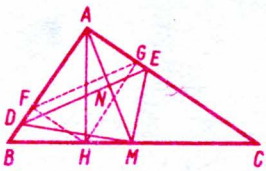


Fig 1.15

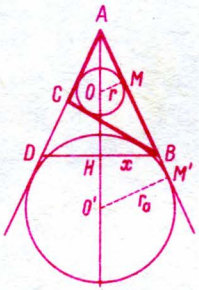


Fig. 1.16

$$\frac{x}{r}=\frac{AB}{AO};\ \frac{x}{r_a}=\frac{AB}{AO'}$$

și înmulțind membru cu membru obținem

$$\frac{x^2}{rr_a}=\frac{AB^2}{AO\cdot AO'}. \tag{1}$$

Pe de altă parte, punctele C și B sînt pe cercul de diametru OO' deoarece bisectoarele CO, CO' ale unghiului ACB sînt perpendiculare ca și cele ale unghiului ABC. Prin urmare simetricul D al lui B în raport cu OO' este de asemenea pe cercul de diametru OO'. Exprimînd în două moduri puterea punctului A în raport cu acest cerc, avem $AO\cdot AO'=AC\cdot AD=AC\cdot AB$. Înlocuind în relația (1) produsul $AO\cdot AO'$ prin $AC\cdot AB$ obținem

$$\frac{x^2}{rr_a}=\frac{AB^2}{AB\cdot AC}=\frac{AB}{AC}=\frac{c}{b} \text{ sau}$$

$$4x^2=BD^2=4\,\frac{c}{b}\,rr_a.$$

Exprimînd în două feluri dublul ariei triunghiului ABC, avem $bh_b=ch_c$, de unde rezultă relația cerută

$$BD^2=4\,\frac{h_b}{h_c}\,rr_a.$$

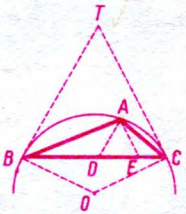


Fig. 1.17

● **17.** Triunghiurile ABD și ABC (Fig. 1.17) sînt asemenea pentru că au unghiul din B comun și $\widehat{BAD}=\widehat{ABT}$ (alterne interne) iar $\widehat{ABT}=\widehat{ACB}$ (avînd vîrful pe cerc și subîntinzînd același arc AB) deci $\widehat{BAD}=\widehat{ACB}$. În același fel se demonstrează că triunghiurile ABC și ACE sînt asemenea avînd unghiul C comun, iar $\widehat{ACT}=\widehat{CAE}$ alterne interne și $\widehat{ACT}=\widehat{ABC}$ ca subîntinzînd același arc AC. Din proporționalitatea laturilor omoloage ale acestor triunghiuri rezultă: $\frac{BD}{AB}=\frac{AB}{BC}$, deci $AB^2=BD\cdot BC$ și din $\frac{AC}{CE}=\frac{BC}{AC}$ avem $AC^2=BC\cdot CE$. Împărțind membru cu membru cele două rezultate avem:

$$\frac{AB^2}{AC^2}=\frac{BD\cdot BC}{BC\cdot CE}=\frac{BD}{CE}.$$

● **18.** Fie A', B', C' picioarele înălțimilor duse, respectiv din A, B, și C. Triunghiurile ABC și ABC_1 sînt egale prin construcție (Fig. 1.18) și cum $\widehat{ABB'}+\widehat{BAB'}=\widehat{ABH}+\widehat{C_1AB}=90°$, $\widehat{BAA'}+\widehat{ABA'}=\widehat{BAH}+\widehat{C_1BA}=90°$ rezultă $\widehat{ABH}+\widehat{C_1BA}+\widehat{BAH}+\widehat{C_1AB}=180°$ deci patrulaterul $BHAC_1$ este inscriptibil, așa că punctul C_1 aparține cercului ABH. Dacă cercul ABH este tangent în B la BC rezultă că $\widehat{HBA'}=\widehat{BAH}$. Dar cum $\widehat{HBA'}=\widehat{HAB'}$ (ca unghiuri cu laturile perpendiculare), rezultă că $\widehat{BAH}=\widehat{HAB'}$, sau $\widehat{BAA'}=\widehat{A'AC}$, deci înălțimea AA' este și bisectoarea corespunzătoare unghiului A. Prin urmare triunghiul ABC este isoscel în A. Proprietatea reciprocă, rezultă fără dificultate.

● **19.** Triunghiurile BHD și AHC sînt asemenea (Fig. 1.19), deci $DH=\frac{mn}{h}$. Cum DH depinde numai de elemente legate de prima înălțime, prin D trebuie să treacă ambele înălțimi duse din vîrfurile B și C.

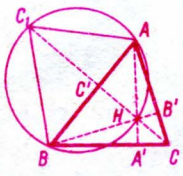


Fig. 1.18

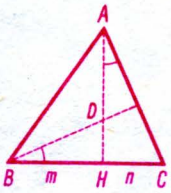


Fig. 1.19

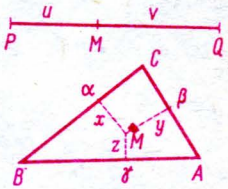


Fig. 1.20

● **20.** 1°. Cu $u+v=s$ (Fig. 1.20) avem $y=pu^2+qv^2=(p+q)u^2-2qsu+qs^2$. Minimul are loc (ca la orice trinom de gradul al doilea) dacă

$$u_0=\frac{qs}{p+q},\ v_0=\frac{ps}{p+q},\ \text{deci}\ \frac{u_0}{v_0}=\frac{q}{p}.$$

2°. Observăm întîi că $ax+by+cz=k$ (const.), căci reprezintă dublul ariei triunghiului ABC. Pentru a reduce problema la una în care apar

numai două variabile independente, presupunem că minimul expresiei $ax^2+by^2+cz^2$ are loc pentru $x=x_0$, $y=y_0$ și z_0. Înlocuind în problemă pe z cu z_0, deducem că trebuie să găsim minimul funcției $ax^2+by^2+cz_0^2$, deci al funcției ax^2+by^2, cu condiția $ax+by=k-cz_0=k_1$. Notînd $ax=X$, $by=Y$, trebuie să găsim minimul funcției $\frac{1}{a}X^2+\frac{1}{b}Y^2$, dacă $X+Y=k_1$. Ori am văzut că aceasta are loc dacă

$$\frac{X}{Y}=\frac{ax}{by}=\frac{\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}}=\frac{a}{b},$$

deci dacă $x=y$. Procedînd analog și presupunînd că $y=y_0$, găsim că pentru minim trebuie să avem $x=z$. Rezultă că minimul căutat are loc pentru $x=y=z$, deci M se află în centrul cercului înscris triunghiului ABC. Construcția geometrică rezultă. ● **21.** Presupunem trasat cercul circumscris triunghiului ABC și fie O centru lui (Fig. 1.21). Conform ipotezei avem $AB+AC=2BC$. Ducem bisectoarea AK (K pe cercul circumscris) și paralela ei CA' pînă întîlnește prelungirea lui AB. Se vede că $\sphericalangle BAK=\sphericalangle BA'C=\sphericalangle ACA'$, deci triunghiul ACA' este isoscel și $AA'=AC$. De asemenea $\sphericalangle ABC=\sphericalangle AKC$ ca avînd aceeași măsură. Triunghiurile $A'CB$ și ACK sînt asemenea ca avînd două unghiuri respectiv egale. Avem

$$\frac{AK}{CK}=\frac{A'B}{BC}=\frac{AB+AC}{BC}=2.$$

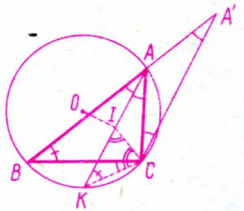


Fig. 1.21

Fie I mijlocul laturii AK. Triunghiul ICK este isoscel (căci $AK=2CK$) deci unghiurile ICK și CIK sînt egale. Să arătăm că CI este bisectoarea unghiului BCA. Să notăm cu x și y unghiurile făcute de CI cu CB și CA. Observăm întîi că $\sphericalangle BCK=\sphericalangle BAK=\alpha$. Atunci în triunghiul AIC avem pentru unghiuri $y+(\pi-x-\alpha)+\alpha=\pi$, deci $x=y$. Rezultă deci că I este centrul cercului înscris triunghiului ABC. Cum el este la mijlocul corzii AK, dreapta

OI este perpendiculară pe coarda AK și proprietatea este dovedită. ● **22.** Cele trei triunghiuri formate (Fig. 1.22) sînt asemenea și notînd cu x, y, z laturile lor omoloage, cu $BC=x+y+z$, avem

$$\sqrt{\frac{S_1}{S}}=\frac{x}{x+y+z},\ \sqrt{\frac{S_2}{S}}=\frac{y}{x+y+z},\ \sqrt{\frac{S_3}{S}}=\frac{z}{x+y+z},$$

deci $\sqrt{S}=\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}$. ● **23.** Fie EOC un diametru și O centrul cercului circumscris triunghiului ABC, al cărui ortocentru este D. Cum $EB\perp BC$ și $AD\perp BC$, rezultă $AD\parallel BE$. La fel $AE\parallel BD$, așa că $AEBD$ este un paralelogram, deci $BE=AD$. Din triunghiul dreptunghic BCE, avem $BC^2+EB^2=4R^2$, deci $a^2+AD^2=4R^2$ (Fig. 1.23).

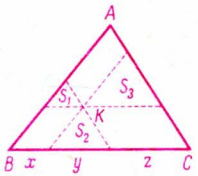


Fig. 1.22

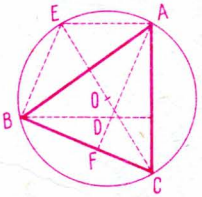


Fig. 1.23

● **24.** 1°. $\widehat{CAO}=\frac{\pi}{4}-x$, $\widehat{ADO}=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{\pi}{4}-x$. Avem

$$OC=a\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=a\frac{1-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x},\ OD=a\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=a\frac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x},$$

de unde $OC\cdot OD=a^2=OB^2$. 2°. Avem

$$AC=\frac{a}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)},\ AD=\frac{a}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}$$

deci $2l\cos^2x-2\sqrt{2}a\cos x-l=0$. Cum produsul rădăcinilor este negativ, avem totdeauna o rădăcină pozitivă și una negativă. Cum $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}$, $\cos x$ trebuie să fie pozitiv și cuprins între $\frac{1}{\sqrt{2}}$ și 1. Rezultă că numai

rădăcina pozitivă poate corespunde și corespunde efectiv numai dacă $l \geqslant 2\sqrt{2}a$. Cum $AB=\sqrt{2}a$, condiția precedentă arată că trebuie să avem $AC+AD \geqslant 2AB$. ● **25.** Din triunghiurile ACD și BCD, avem:

$$\frac{AD}{\sin\alpha}=\frac{d}{\sin(\gamma-\alpha)},\quad \frac{BD}{\sin\beta}=\frac{d}{\sin(\gamma-\beta)},$$

unde $CD=d$. Apoi

$$AA'=AD\sin\gamma=\frac{d\sin\alpha\sin\gamma}{\sin(\gamma-\alpha)}=1368{,}9\text{ m}$$

$$BB'=BD\sin\gamma=\frac{d\sin\beta\sin\gamma}{\sin(\gamma-\beta)}=3262{,}4\text{ m}.$$

● **26.** Să presupunem că planul orizontal este reprezentat prin DC, D fiind proiecția ochiului O al observatorului. $BC=b$, este turnul și $AB=a$ este săgeata. Distanța $DC=OH=x$ trebuie astfel determinată încît unghiurile $\widehat{AOB}$ și $\widehat{BOC}$ să fie egale. OB este atunci bisectoarea triunghiului AOC și avem

$$\frac{OA}{OC}=\frac{AB}{BC}=\frac{a}{b}.$$

Din triunghiurile dreptunghice OHC și OHA avem

$$OC^2=x^2+h^2,\ OA^2=x^2+(a+b-h)^2,$$

care înlocuite mai sus, ne dă

$$a^2(x^2+h^2)=b^2[x^2+(a+b-h)^2]$$

deci

$$x^2=\frac{b^2(a+b)-2hb^2-h^2(a-b)}{a-b}.$$

Presupunînd că a și b sînt date, trebuie să determinăm pe h așa ca x^2 să existe, deci fracția din partea a doua să fie pozitivă. Constatăm că rădăcinile numărătorului sînt b și $\dfrac{b(a+b)}{b-a}$. Dacă $a>b$, trebuie să avem $\dfrac{-b(a+b)}{a-b}<h<b$, deci h poate fi negativ, deci sub nivelul planului ori-

zontal. Dacă $b>a$, trebuie ca $b<h<\frac{b(a+b)}{b-a}$. Dacă $a=b$, ecuația în x, devine $x^2+h^2=x^2+(2a-h)^2$, deci $h^2=(2a-h)^2$, de unde $a=b=h$ și x arbitrar. ● **27.** 1°. Se construiește cercul circumscris patrulaterului $ABOC$ ($\hat{A}=\hat{O}=90°$) și cum arcele $\overset{\frown}{CO}$ și $\overset{\frown}{OB}$ sînt egale, rezultă că și unghiurile $\widehat{CAO}$ și $\widehat{BAO}$ sînt egale, deci că AO este bisectoarea unghiului A. 2°. Triunghiurile dreptunghice CC_1A și CAH sînt egale ca avînd ipotenuza AC comună și unghiul $\widehat{CAH}=\widehat{CC_1H}$ (patrulaterul CC_1AH este inscriptibil)$=\widehat{C_1AC}$, deci perpendiculara din C_1 pe AC este C_1H. În mod analog se arată că perpendiculara din B_1 pe AB este B_1H, deci cele două perpendiculare se întîlnesc în punctul H, piciorul înălțimii dusă din A pe BC. ● **28.** Notînd cu AD înălțimea vîrfului A, triunghiurile ADB și ADC sînt asemenea. Avem $AD^2=DB\cdot DC$. Problema este posibilă numai dacă $\hat{B}+\hat{C}=\hat{B}+90°+\hat{B}<180°$, deci dacă $\hat{B}<45°$. Reciproc, dacă se dă baza BC și un unghi B, se pot forma două triunghiuri (unul dreptunghic) așa ca înălțimea dusă din vîrful opus bazei să fie medie proporțională între segmentele determinate pe catete. ● **29.** Din perechile de triunghiuri asemenea BRM, BDA, și ACD, NCR, avem

$$\frac{RM}{AD}=\frac{BR}{BD},\quad \frac{RN}{AD}=\frac{CR}{CD},$$

deci

$$RN+RM=\frac{AD}{BD}(BR+CR)=2AD.$$

● **30.** Notînd cu a, b, c, laturile triunghiului și cu h_a, h_b, h_c înălțimile perpendiculare pe aceste laturi, aria triunghiului este

$$S=\frac{ah_a}{2}=\frac{bh_b}{2}=\frac{ch_c}{2}.$$

Din ipoteza $h_a+h_b=h_c$, rezultă $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$. ● **31.** Ținînd seama de expresia razei r a cercului înscris într-un triunghi trebuie să demonstrăm că

$$p^2>\frac{27(p-a)(p-b)(p-c)}{p},\text{ sau}$$

$$p^3>27(p-a)(p-b)(p-c).$$

Dar, produsul mai multor factori pozitivi a căror sumă este constantă este maxim cînd toți factorii sînt egali între ei, deci produsul $(p-a)\times$ $\times(p-b)(p-c)$ este maxim pentru $a=b=c$, deci dacă triunghiul este echilateral. Numai în acest caz avem egalitate, deci $p^3=27(p-a)^3$, prin urmare avem totdeauna $p^2\geqslant 27r^2$. ● **32.** 1°. Se construiește mediana AM și se ia pe aceasta I mijlocul ei. $BI\cap AC=D$. Ducem $ME\parallel BD$. Cele două puncte D și E împart segmentul AC în segmentele egale $AD=$ $=DE=EC$. 2°. În triunghiul BDC, ME este linie mijlocie, deci $BD\parallel ME$ și $ID\parallel ME$, deci ID linie mijlocie în triunghiul AME și $ID=\frac{1}{2}ME$. Cum $\frac{ME}{BD}=\frac{1}{2}$ deci $BD=2\cdot ME$ rezultă $\frac{DI}{DB}=\frac{1}{4}$. 3°. Ducem $AL\parallel CK$ și cum I este mijlocul lui AM, CI este linie mijlocie în triunghiul AML deci $MC=CL$. În triunghiul ABL, $KC\parallel AL$ și $\frac{CL}{CB}=\frac{1}{2}=\frac{AK}{BK}$. 4°. Aplicăm teorema lui Menelaus triunghiului BDC

$$\frac{LB}{LC}\cdot\frac{EC}{ED}\cdot\frac{ID}{IB}=3\cdot 1\cdot\frac{1}{3}=1$$

deci punctele I, E, L sînt coliniare. ● **33.** 1°. $\widehat{ABC}=\widehat{AB'C'}=$ $=\widehat{C_aB_1C'}$, deci $B_1C_a\parallel AC$; $\widehat{AB'C'}=\widehat{C_1B'C}=\widehat{C_1B_aC}$ deci $C_1B_a\parallel AB$. 2°. $\widehat{C'B'B}=\widehat{C'CB}=\widehat{C'C_1C_a}$ deci $C_aC_1\parallel BB'$; $\widehat{C'CB}=\widehat{B_1B'B}=\widehat{B_1B_aB}$ deci $B_aB_1\parallel CC'$. 3°. Patrulaterul $B_1C_1B_aC_a$ este inscriptibil ($\widehat{B_aC_aC_1}=\widehat{B_aB_1C_1}$). ● **34.** 1°. $S_{BB'C'}=S_{B'C'C}$ avînd aceeași bază $B'C'$ și aceeași înălțime. De aici $S_{BOB'}=S_{COC'}$. 2°. $S=\frac{ax(2h-x)}{2h}$. 3°. $S_1=\frac{ahx}{2(2h-x)}$.

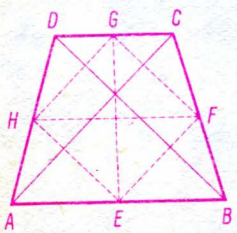


Fig. 1.36

● **35.** 1° Se aplică teorema lui Stewart în care exprimăm BD și DC din teorema bisectoarei. 2° Se construiește ecuația de gradul II ținîndu-se cont și de relația obținută la punctul 1. Se pune condiția $d>0$ și se obține pentru problemă, $d\in\left(0,\frac{1}{2}\sqrt{l^2-a^2}\right)$. ● **36.** Fie trapezul $ABCD$ (Fig. 1.36). Patrulaterul obținut unind mijloacele laturilor este un pătrat, deci înălțimea trapezului este egală cu linia lui mijlocie așa

că aria este d^2. ● **37.** Fie ABC un triunghi oarecare, I, I_a centrele cercurilor înscris și exînscris în unghiul A; r, r_a razele acestor cercuri, F, K punctele de contact ale cercurilor cu latura AB. Construim paralela IM la FK pînă la intersecția M cu I_aK. Se știe că $FK=BC$. În triunghiul dreptunghic IMI_a avem $IM=FK=BC$ și $MI_a=r_a-r$. Înlocuind IM^2 prin $4rr_a$ avem

$$II_a^2=(r-r_a)^2+4rr_a=(r+r_a)^2 \text{ sau}$$

$$II_a=r+r_a,$$

cercurile (I), (I_a) sînt deci tangente exterioare; latura BC, tangenta comună interioară, este perpendiculară pe bisectoarea AII_a și triunghiul ABC, unde bisectoarea AI este perpendiculară pe BC, este isoscel. ● **38.** 1°. Avem $\widehat{DAE}=45°$, $\widehat{EAG}=90°$, $\widehat{GAF}=45°$, deci D, A, F coliniare și dreapta DAF este axa de simetrie a celor șase puncte. 2°. Triunghiurile BAC și AEG sînt egale. Apoi avem

$$\widehat{KAG}=\widehat{KGA}=\widehat{AGB}=\widehat{BAH} \text{ deci } K\in AH.$$

3°. $AEPG$ dreptunghi, K mijlocul lui EG deci K este și mijlocul lui AP deci $P\in AK$ și $P\in AH$. 4°. Triunghiurile DBC și ABP sînt egale căci $BD=AB$, $BC=AP$ și $\widehat{DBC}=1\text{dr}+\widehat{ABC}=1\text{dr}+\widehat{EAP}=\widehat{BAP}$, așa că $CD=BD$, de asemenea deoarece $\widehat{BPH}=\widehat{DCB}$ și $PH\perp BC$, rezultă că și $CD\perp BP$. Analog, din triunghiurile egale BCF și FGE, deducem $BF=FE$. Dar $FE=CP$, ca diagonale în dreptunghiul $CFPE$ și deci $BF=CP$. Rezultă apoi și că $BF\perp CP$. 5°. Patrulaterele $BHML$, $MHCN$, $LMNP$ sînt inscriptibile deci M este punctul comun al cercurilor circumscrise lor. ● **39.** $AF=ED$ ca diametrii ai cercului ADF. Patrulaterul înscris $ADFE$ este un dreptunghi iar pentru că AF este bisectoarea unghiului drept avem de-a face cu un pătrat. Triunghiurile dreptunghice FDB și EFC sînt egale deci $BD=CE$ și $AB+AC=BD+DA+AE-CE=DA+AE$. ● **40.** 1°. Dacă ΔABC este isoscel și $\hat{B}=\hat{C}$, atunci $\hat{B}=\hat{C}=\dfrac{180°}{4}=45°$ iar $\hat{A}=90°$. Dacă $\hat{A}=\hat{C}=2\hat{B}$

atunci $\hat{B}=\frac{180^\circ}{5}=36^\circ$ iar $\hat{A}=\hat{C}=72^\circ$. Dacă $\triangle ABC$ este dreptunghic și $\hat{A}=90^\circ$ rezultă că $\hat{B}=\hat{C}=45^\circ$ sau dacă $\hat{C}=90^\circ$ rezultă $\hat{A}=60^\circ$, $\hat{B}=30^\circ$. 2°. Dacă $\hat{A}=2\hat{B}$ rezultă $\widehat{CAD}=\hat{B}=\widehat{DAB}$, $\widehat{ADC}=2\hat{B}$ și deci $\widehat{EDA}=\hat{B}$ de unde $ED\parallel AB$. 3°. $\triangle ABC\sim\triangle ADC$ ($\widehat{CAD}=\hat{B}$, $\hat{C}$ unghi comun) deci $\frac{CD}{CA}=\frac{CA}{BC}$ de unde $CA^2=CD\cdot BC$. ● **41.** Triunghiul COD este dreptunghic. ● **42.** Triunghiurile dreptunghice AFC și BEC avînd unghiul C comun, sînt asemenea. Avem deci

$$\frac{EC}{FC}=\frac{BC}{AC},$$

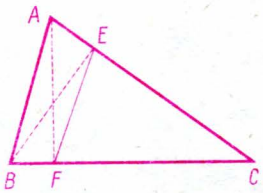


Fig. 1.42

egalitate care împreună cu unghiul comun C, arată că triunghiurile EFC și ABC sînt asemenea (Fig. 1.42). ● **43.** 1°. Cum $BC_1<BC_2<BC$ și cum

$$R_1=\frac{BC_1}{2},\quad R_2=\frac{BC_2\cdot C_1C_2\cdot BC_1}{4\,\frac{C_1C_2\cdot AB}{2}}=\frac{BC_2}{2AB}\cdot BC_1,\quad R_3=\frac{BC_2}{2AB}\cdot BC$$

și ținînd seama că $\frac{BC_2}{AB}>1$ vom obține $R_1<R_2$ și $R_2<R_3$, deci $R_1<R_2<R_3$. 2°. Exprimăm în primul rînd unghiurile $\widehat{AC_1B}$, $\widehat{BC_1C_2}$, $\widehat{BC_2C_1}$, $\widehat{BC_2C}$ și $\hat{C}$ în funcție de unghiul $\hat{B}$. Notînd $\frac{\hat{B}}{3}=\beta$, $(0<\beta<30^\circ)$ obținem: $\widehat{AC_1B}=90^\circ-\beta$, $\widehat{BC_1C_2}=90^\circ+\beta$, $\widehat{BC_2C_1}=90^\circ-2\beta$, $\widehat{BC_2C}=90^\circ+2\beta$, $\hat{C}=90^\circ-3\beta$. Înlocuind în relația cerută pe R_1, R_2, R_3, urmează să arătăm că $\frac{BC_1\cdot BC_2}{AB}<BC$. Cum $BC_1<\sqrt{AB\cdot BC_2}$ și $BC_2<\sqrt{BC_1\cdot BC}$ rezultă $BC_1\cdot BC_2<\sqrt{AB\cdot BC_2\cdot BC_1\cdot BC}$ sau $(BC_1\cdot BC_2)^2<AB\cdot BC\cdot(BC_1\cdot BC_2)$ deci $BC_1\cdot BC_2<AB\cdot BC$ sau $\frac{BC_1\cdot BC_2}{AB}<BC$.

Soluție trigonometrică. Cum

$$BC_1=\frac{AB}{\sin(90°-\beta)},\quad BC_2=\frac{AB\cdot\sin(90°+\beta)}{\sin(90°-\beta)\cdot\sin(90°-2\beta)}\ \text{și}$$

$$BC=\frac{AB}{\sin(90°-3\beta)}\ ,$$

rezultă că

$$\frac{AB}{\sin(90°-\beta)}\cdot\frac{AB\cdot\sin(90°+\beta)}{\sin(90°-\beta)\sin(90°-2\beta)}\cdot\frac{1}{AB}<\frac{AB}{\sin(90°-3\beta)}.$$

Simplificînd cu AB obținem inegalitatea

$$\frac{\sin(90°+\beta)}{\sin^2(90°-\beta)\cdot\sin(90°-2\beta)}<\frac{1}{\sin(90°-3\beta)}$$

și cum $\sin(90°-\beta)=\sin(90°+\beta)$ avem

$$\frac{1}{\sin(90°-\beta)\cdot\sin(90°-2\beta)}<\frac{1}{\sin(90°-3\beta)}$$

sau $\sin(90°-\beta)\sin(90°-2\beta)>\sin(90°-3\beta)$, de unde $\cos\beta\cdot\cos 2\beta>\cos 3\beta$ relație adevărată. ● **44.** 1°. Notăm $MH=h$, $MH'=h'$ respectiv distanțele lui M la AB și AC și cu $d=CC'=BB'$. Din egalitatea pentru arii $AB'MC=ABC-BB'M=AB'C'-CC'M$, deducem $h'=h-b+c-d$, unde $b=AC$ și $c=AB$. Înlocuind această valoare în egalitatea pentru arii $ABC=ABM+AMC$, obținem $h=\frac{b(b+d)}{b+c}$.

Din $\triangle BHM\sim\triangle BAC$ deducem BM, MC și raportul $\frac{BM}{MC}=\frac{b+d}{c-d}$.

2°. Cînd $d\to 0$, $M\to M_1$ și $\frac{BM_1}{M_1C}=\frac{b}{c}$. Se arată că M_1 este simetricul lui N, piciorul bisectoarei dusă din A_1 față de mijlocul segmentului BC. Maximul lui d este c, caz în care punctele M și C coincid. ● **45.** 1°. Dacă triunghiul este oarecare, laturile sînt

$$x=x;\ y=p-\frac{1}{4}x;\ z=p-\frac{3}{4}x.$$

Dacă triunghiul este dreptunghic cu ipotenuza x

$$x=\frac{4}{3}(\sqrt{7}-2)p,\quad y=\frac{1}{3}(5-\sqrt{7})p,\quad z=(3-\sqrt{7})p,$$

iar dacă y este ipotenuza $x=\frac{2}{3}p;\ y=\frac{5}{6}p;\ z=\frac{1}{2}p.$

2°. $x\in(0;p)$. 3°. $x=4$, $y=11$, $z=9$ (triunghi oarecare) și $x=8$, $y=10$, $z=6$ (triunghi dreptunghic cu ipotenuza y). ● **46**. 1°. Notînd ipotenuza cu a, avem $a=\frac{p^2-S}{p}$. Laturile b și c se obțin apoi din ecuațiile $pu^2-(p^2+S)u+2pS=0$. 2°. Trebuie să avem $p^2-S>0$ și $S^2-6p^2S+p^4>0$, deci trebuie ca $0<S<p^2(3-\sqrt{8})$. Pentru $S=0$ avem $a=b=p$, $c=0$, iar pentru $S=p^2(3-\sqrt{8})$, găsim $S=p^2(3-\sqrt{8})$, $a=2p(\sqrt{2}-1)$, $b=c=p(2-\sqrt{2})$. 3°. Aria maximă este $p^2(3-\sqrt{8})$, caz în care triunghiul dreptunghic este isoscel și pentru $p=12$cm, avem $a=120(\sqrt{2}-1)$cm. Construcția geometrică se face fără greutate. Avem $S=617$ mm^2. ● **47**. ● **48**. 1°. Patrulaterul $ADIJ$ este un pătrat. Utilizînd formulele pentru razele cercului înscris și circumscris, unui triunghi de laturi a, b, c și faptul că triunghiul este dreptunghic găsim $2r+2R=b+c$. 2°. $2r_a-2R=b+c$. ● **49**. Notînd laturile cu $a-\rho$, a, $a+\rho$ ($a>0$, $\rho>0$), din teorema lui Pitagora găsim $a=4\rho$. Scriind în două feluri aria triunghiului, raza r a cercului înscris este $r=\frac{a-\rho}{3}$. Rezultă $r=\rho$. ● **50**. 1°. Triunghiurile AOB și AOC sînt isoscele. Patrulaterul $AMON$ este inscriptibil și deci $\widehat{OMN}=\widehat{OAN}=\widehat{ACO}$. 3°. Triunghiurile asemenea OMN și ABC ne dau $\frac{MN}{BC}=\frac{ON}{AB}$ ceea ce ne arată că MN va fi minim cînd ON va fi minim. Aceasta are loc cînd $ONAM$ este un dreptunghi, caz în care $MN=OA=\frac{BC}{2}$. Aria triunghiului OMN este în acest caz $\frac{AB\cdot AC}{8}$.

● **51.** Se ține seama de asemănarea triunghiurilor și de teorema bisectoarei. Găsim

$$\frac{(\sqrt{b^2+c^2}-c)c^4}{2b(b^2+c^2)}.$$

● **52.** Avem

$$AH=\frac{bc}{a},\quad AM=\frac{a}{2},\quad HM=\frac{a^2-2c^2}{2a},\quad HN=\frac{bc(b^2-c^2)}{a^3}.$$

Dacă $AH=2HN$, laturile triunghiului sînt c, $c\sqrt{3}$ și $2c$, iar unghiurile de 30°, 60° și 90°. ● **53.** Se aplică teorema lui Pitagora celor șase triunghiuri dreptunghice formate, se adună convenabil astfel ca segmentele PA, PB, PC, PA', PB', PC' să se reducă și se obține relația cerută. ● **54.** BF este a treia înălțime a triunghiului BDE (Fig. 1.54). Triunghiurile EBD și FAB au laturile două cîte două perpendiculare. $ED\perp FB$, $BD\perp AB$, $AF\perp BE$ deci aceste două triunghiuri sînt asemenea. Cum $\triangle BDE$ este isoscel, rezultă că și $\triangle AFB$ este isoscel deci $AF=AB$. În consecință, punctul F se deplasează pe cercul cu centrul în punctul A și cu raza AB. Cînd punctul C descrie cercul BCA dreapta AC se rotește cu 180° în jurul lui A și punctul F descrie semicercul de centru A și de rază AB limitat la perpendiculara în A pe AB. ● **55.**

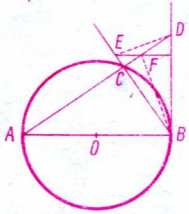


Fig. 1.54

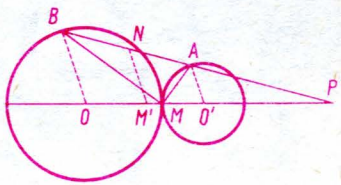


Fig. 1.55

1°. Unghiul $\widehat{BMA}$ fiind drept, rezultă că unghiurile $\widehat{MOB}$ și $\widehat{MO'A}$ sînt suplimentare, deci $OB\parallel O'A$ notînd cu R și R' razele celor două cercuri și cu P punctul de intersecție al dreptei AB cu linia centrelor OO', din triunghiurile asemenea OBP și $O'AP$ avem (fig. 1.55)

$$\frac{O'P}{OP}=\frac{R'}{R},\text{ sau }\frac{O'P}{OP-O'P}=\frac{R'}{R-R'},\text{ deci }O'P=\frac{R'(R+R')}{R-R'}.$$

prin urmare punctul P este fix. 2°. Notăm cu N și M' mijloacele segmentelor AB și OO', $M'N$ este linie mijlocie în trapezul $ABOO'$, deci $M'N=\frac{1}{2}(R+R')$. Cum $M'N$ este constant, rezultă că N se deplasează

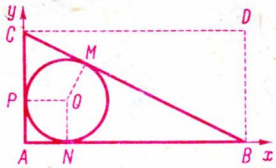


Fig. 1.56

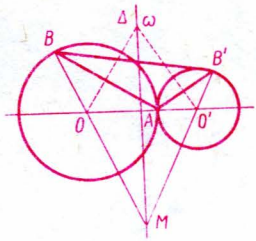


Fig. 1.57

pe un cerc cu centrul în M' și cu raza $\frac{1}{2}(R+R')$. ● **56.** 1°. Ținînd cont, că $BN=BM$ și $CM=CP$ (Fig. 1.56) rezultă $BC=x+y-2R$. Aplicînd teorema lui Pitagora obținem relația (1) $xy-2R(x+y)+2R^2=0$. Cum $MB\cdot MC=(x-R)(y-R)=xy-R(x+y)+R^2$, folosind relația precedentă obținem $MB\cdot MC=xy-\frac{xy}{2}=\frac{xy}{2}$, care este aria triunghiului ABC.

2°. Din relația (1) deducem

$$y=\frac{2R(x-R)}{x-2R}.$$

Curba reprezentativă (pentru $x>2R$) este chiar locul geometric al punctului D, al patrulea vîrf al dreptunghiului $ABCD$. Ea este ramura unei hiperbole echilatere care față de axele Axy, are asimptotele $x=2R$ și $y=2R$. ● **57.** 1°. Triunghiurile isoscele AOB și $AO'B'$ sînt asemenea avînd laturile proporționale, în consecință, $\widehat{AOB}=\widehat{B'O'A}$ (Fig. 1.57) și punctul M al intersecției dreptelor OB, $O'B'$, egal înclinate, dar în sens contrar, pe OO', se deplasează pe perpendiculara $\triangle$ la OO' în mijlocul său (mediatoarea lui OO'). Cînd punctul B descrie cercul O, dreapta AB se rotește în jurul punctului A cu un unghi de 180°; dreapta OB se rotește în jurul lui O cu un unghi de 360° și în consecință punctul M descrie mediatoarea $\triangle$ a segmentului OO'. 2°. Fie ω centrul cercului circumscris triunghiului ABB'. Bazele triunghiurilor isoscele asemenea AOB, $AO'B'$, formează cu OO' unghiuri egale și de sens contrar, prin urmare perpendicularele $O\omega$, $O'\omega$ la AB, AB' în mijlocul lor sînt egal înclinate, și în sens contrar, pe OO', deci punctul ω descrie, de asemenea, mediatoarea segmentului OO'. Cînd AB se rotește de un unghi de 180° în jurul lui A, perpendiculara sa $O\omega$ se rotește de același unghi în jurul lui O și în consecință descrie dreapta $\triangle$. ● **58.** 1°. Segmentele $M'P$ și MP' sînt de două ori cît OA și paralele cu OA, deci

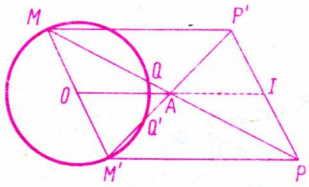


Fig. 1.58

patrulaterul $MP'PM'$ este un paralelogram (Fig. 1.58). $PP'=MM'$, iar mijlocul său I este pe dreapta OA. Cum $OA=AI$, rezultă că I este fix. Punctele P și P', simetricele lui M și M' în raport cu A descriu cercul simetric cercului C în raport cu A, adică cercul cu centrul în I și cu aceeași rază ca și cercul C. 2°. Notînd $OA=d$ și $OM=R$ și ținînd seama de teorema medianei (3.1—3.3) avem $MP^2+M'P'^2=4(AM^2+AM'^2)=$ $=8(OA^2+OM^2)=8(d^2+R^2)$. ● **59.** 1°. AB, BC și CA sînt linii mijlocii în triunghiurile IPQ, IQR și IRP (Fig. 1.59). Analog, din motive de simetrie, aceleași laturi sînt linii mijlocii în triunghiul $O_1O_2O_3$. Rezultă că triunghiurile $O_1O_2O_3$ și PQR sînt egale și asemenea cu triunghiul ABC care are ca laturi jumătățile laturilor triunghiului $O_1O_2O_3$. 2°. Cercurile circumscrise triunghiurilor egale PQR și $O_1O_2O_3$ sînt egale. Dar centrul cercului $O_1O_2O_3$ este la intersecția mediatoarelor sale, deci în punctul I, raza lui fiind O_1I, deci raza comună a celor trei cercuri inițiale. Cum înălțimile triunghiului $O_1O_2O_3$ sînt mediatoarele triunghiului PQR centrul cercului circumscris acestuia este în ortocentrul cercului $O_1O_2O_3$. ● **60.** Cercul căutat poate fi tangent interior celor două cercuri (două soluții: cercuri egale și simetrice față de CC'), sau poate fi tangent interior unui cerc și exterior celuilalt (patru soluții: cercuri egale și simetrice față de mijlocul liniei centrelor (Fig. 1.60)). Să notăm cu R raza cercurilor date, cu r și γ raza și centrul cercului

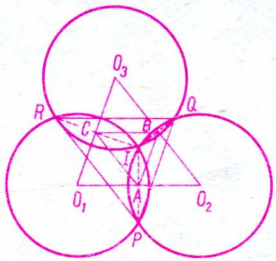


Fig. 1.59

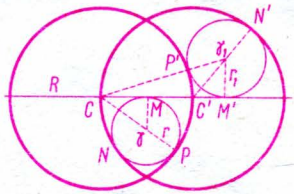


Fig. 1.60

căutat în primul caz și cu r_1, γ_1 în al doilea caz. Să notăm cu M, N, P și M', N', P' punctele de tangență în cele două cazuri. Cum în fiecare punct de tangență razele sînt în prelungire, căutăm de fiecare dată să ajungem la triunghiuri dreptunghice din care să obținem raza dorită. În primul caz laturile triunghiului dreptunghic $CM\gamma$ sînt $\frac{R}{2}$, r, $R-r$ și găsim $r=\frac{3}{8}R$. În al doilea caz, în triunghiurile dreptunghice $CM'\gamma_1$ și $C'M'\gamma_1$ laturile se pot exprima în funcție de R, r_1 și $C'M'$ ($C'\gamma_1=R-r_1$, $C\gamma_1=R+r_1$, $CC'=R$, $M'\gamma_1=r_1$). Scriind pentru fiecare triunghi teorema lui Pitagora, găsim

$$r_1=\frac{R\sqrt{3}}{4},\quad C'M'=\frac{R}{2}\left(-2+\sqrt{4+\sqrt{12}}\right)=\frac{R}{2}\left(-1+\sqrt{3}\right).$$

● **61.** $\widehat{ACD}=\frac{\widehat{AB}+\widehat{BD}}{2}$; $\widehat{CAD}=\frac{\widehat{CD}}{2}=\frac{\widehat{BD}}{2}$;

$$\widehat{ACD}-\widehat{CAD}=\frac{\widehat{AB}+\widehat{BD}}{2}-\frac{\widehat{BD}}{2}=\frac{\widehat{AB}}{2}=\frac{180^\circ}{2}=90^\circ;$$

$$\left.\begin{aligned}&\sphericalangle DOB=\widehat{BD}\\&\widehat{CAB}=\frac{\widehat{CB}}{2}=\widehat{BD}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\sphericalangle DOB=\sphericalangle CAB\Rightarrow OD\parallel AC\Rightarrow DM\perp AC.$$

● **62.** 1° $PO_1^2=PH^2+HO_1^2=K^2HM^2+(OO_1-OH)^2=K^2(R-OH)^2+OO_1^2+OH^2-2OO_1\times OH=K^2(R^2-OH^2)+R^2(1-K^2)+OH^2-2OO_1\times OH=R^2+OH^2(1-K^2)-2OH\times OO_1$ iar $OO_2=\frac{R^2}{OO_1}=\frac{R}{\sqrt{1-K^2}}$ iar $HO_2^2=(CO_2-CH)^2=CO_2^2+CH^2-2CO_2\times CH=\frac{R^2}{1-K^2}+CH^2-2CH\times CO_2$. Cum $CO_1\times CO_2=R^2$ se deduce cu $\frac{PO_1^2}{HO_2^2}=1-K^2$. 2°. Dacă O_2' este simetricul lui O_2 față de C și ținem seama de cele de mai sus și de simetrie deducem $\frac{PO_1'}{HO_2'}=\sqrt{1-K^2}$ și că $PO_1=HO_2\sqrt{1-K^2}$; $PO_1'=HO_2'\sqrt{1-K^2}$ așa că

$PO_1+PO_1'=\sqrt{1-K^2}(HO_2+HO_2')=2CO_2\sqrt{1-K^2}=2R$. 3° Locul geometric descris de punctul P este o elipsă, cu focarele în O_1 și O_1' și de axă mare $2R$, pentru că suma distanțelor de la punctul P la punctele O_1 și O_1' este constantă. ● **63.** $\widehat{MO_1I}=\widehat{AMB}=$const. căci unghiurile au laturile perpendiculare. Pe de altă parte $\widehat{AMB}=\widehat{ACB}$ ca avînd aceeași măsură. Cum $OC=OA$, avem și $\widehat{CAO}=\widehat{ACO}$. Rezultă $\widehat{AOC}=$const., pentru că patrulaterul AOO_1C este inscriptibil, deci punctul O_1 se găsește pe cercul ce trece prin punctele fixe A, O, C (Fig. 1.63). ● **64.** Notînd $\sphericalangle AOB=x$ și $\sphericalangle OCB=y$ (Fig. 1.64) triunghiurile OCD și OBD sînt isoscele. Avem $\sphericalangle OBD=2y$, deci însumînd unghiurile din jurul

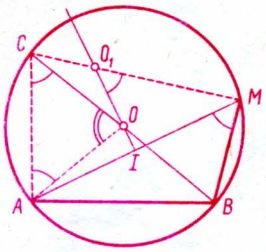


Fig. 1.63

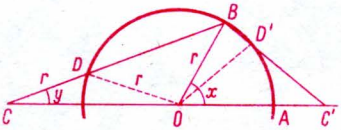


Fig. 1.64

punctului O, avem $x=3y$. (Arhimede a propus această construcție pentru problema trisecției unui unghi). În cazul cînd punctele A și C sînt de aceeași parte a punctului O, avem $y=60°-\frac{x}{3}$. Cazurile extreme de posibilitate ale celor două construcții sînt cînd D coincide cu B, deci $y=45°$ și $x=135°$, sau cînd D' coincide cu B, deci $x=45°$. Pentru prima construcție trebuie ca $x\leqslant 135°$, iar pentru a doua ca $45°\leqslant x$. ● **65.** 1°. Din triunghiul ABC avem (Fig. 1.65), $CE^2=AE\cdot EB=(2R-x)x$, unde $EB=x$. Din triunghiul dreptunghic ATE, găsim $TE^2=EI\cdot EA=EI(2R-x)$. Cum $TE=CE$ ca fiind raze ale aceluiași cerc, rezultă $EI=x$, deci $EI=EB$. 2°. Din același triunghi ATE, avem $TI^2=AI\cdot IE=2x(R-x)$, deci aria triunghiului ATT' este $y=2(R-x)\sqrt{2x(R-x)}$. 3°. x variază de la zero la R. Aria y este nulă pentru capetele acestui interval. Cum

$$y' = \frac{2(R-x)(R-4x)}{\sqrt{2x(R-x)}}$$

avem un maxim pentru $x = \frac{R}{4}$, a cărui valoare este $\frac{3\sqrt{6}}{8}R^2$. 4°. Centrul de greutate G al triunghiului CIB este pe înălțimea CE, așa ca $GE = \frac{1}{3}CE$. Cum punctul C descrie cercul cu centrul O și raza R, notînd $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, avem $GE = CE\cos\alpha$, deci punctul G descrie o elipsă (§6.1) cu semiaxe în raportul $\frac{1}{3}$, deci acestea sînt R și $\frac{1}{3}R$. ● **66.** 1°. Triunghiurile ABP și ACM, precum și AIP și ABM (Fig. 1.66) sînt asemenea, deci avem $\frac{AB}{AC} = \frac{AP}{AM}$ și $\frac{AP}{AM} = \frac{AI}{AB}$, de unde $\frac{AB}{AC} = \frac{AI}{AB}$, așa că $AC \cdot AI = AB^2$. Prin urmare punctul I este fix, căci segmentele AC și AB sînt fixe. Așa fiind, din triunghiurile dreptunghice IBP și IQC rezultă că P și Q descriu două cercuri cu diametrele IB, respectiv IC. 2°. Ținînd seama că unghiul $\widehat{PBM}$ este drept, din relația $AB^2 = AP \cdot AM$ rezultă că AB este tangenta dusă din A la cercul ce trece prin P, B, M și care are diametrul PM. Cum OB și OM sînt raze ale cercului inițial, rezultă că OM este, ca și OB, tangentă la cercul PBM, prin urmare OM este perpendiculară pe diametrul PM, așa că unghiul

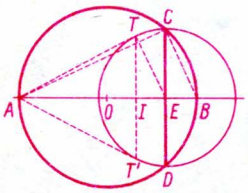


Fig. 1.65

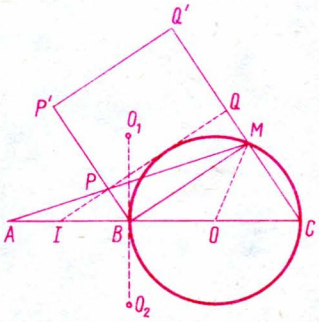


Fig. 1.66

căutat este drept. 3°. Pe BM ca latură putem construi două pătrate $MBP'Q'$ în care vîrfurile se succed în sensul acelor ceasornicului și un altul simetric față de BM. Este suficient să studiem numai primul caz. Cum $BP' = BM$, punctul P' se deduce din punctul M printr-o rotație în jurul lui B de unghi drept în sens direct cu 90°. Locul punctului P' se deduce din locul lui M, prin rotații în jurul lui B de unghi drept, deci este format de cercurile cu centrele O_1 și O_2 și diametre egale cu BC. În ce privește locul geometric al punctului Q', cînd punctul M descrie semicercul BMC, din figură se vede că $\sphericalangle BQ'M = \sphericalangle BQ'C = \frac{\pi}{4}$, deci Q' este pe arcul de cerc capabil de unghiul $\frac{\pi}{4}$, descris pe BC ca bază. Același lucru se obține în cazul cînd punctul M descrie cealaltă jumătate a cercului dat. În cazul cînd se consideră al doilea pătrat, locul este simetricul celui precedent față de BM. ● **67.** Corzile AB și $A'B'$ din cercul C sînt antiparalele (Fig. 1.67). Dar AB este antiparalelă și cu tangenta în D la cercul O, deci aceasta este paralelă cu $A'B'$. Rezultă că raza OD este perpendiculară pe $A'B'$. Dar $A'B'$ este coardă comună în cercurile C și O', deci CO' este și ea perpendiculară pe $A'B'$. Rezultă că OD și CO' sînt paralele. Analog se arată că OC și $O'D$, sînt paralele deci patrulaterul $OCO'D$ este un paralelogram. 2°. Diagonala OO' întîlnește diagonala CD în mijlocul ei M. Linia centrelor OO' este perpendiculară pe coarda comună DF în mijlocul ei N. În triunghiul DFC, linia mijlocie MN este perpendiculară pe DF deci același lucru se întîmplă cu latura DF. ● **68.** 1° Notăm cu AA', BB', CC' cele trei înălțimi care se întîlnesc în ortocentrul H. (Fig. 1.68). Fie A'' simetricul lui H față de AB. Triunghiurile $HA'C$ și $A'A''C$ sînt egale, deci

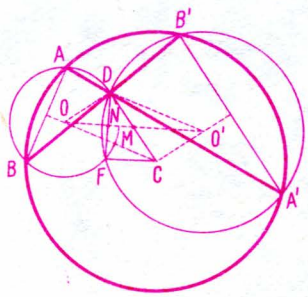


Fig. 1.67

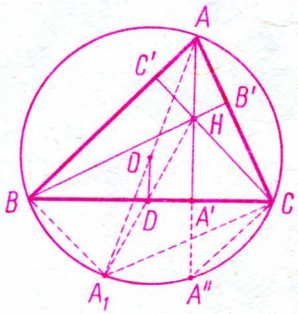


Fig. 1.68

$\sphericalangle A'A''C = \sphericalangle A'HC$. Dar $\sphericalangle A'HC = \sphericalangle ABC$ (laturile corespunzătoare perpendiculare), așa că $\sphericalangle A'A''C = \sphericalangle ABC$, deci patrulaterul $ABA''C$ este inscriptibil, deci A'' se găsește pe cercul circumscris triunghiului ABC. Notînd cu A_1 punctul diametral opus lui A, avem $A_1C \| BH$ și $A_1B \| CH$, deci patrulaterul A_1BHC este paralelogram, deci simetricul A_1 al ortocentrului H față de mijlocul D al laturei BC este pe cercul circumscris triunghiului ABC. 2° OD este linie mijlocie în triunghiul AA_1H, deci $AH = 2OD$. ● **69**. Fie D punctul unde bisectoarea unghiului $\widehat{ABC}$ taie cercul (Fig. 1.69) și fie DT tangenta la cerc. Notînd cu BM mediana triunghiului BA_1C, aceasta este linie mijlocie în triunghiul AA_1C, deci este paralelă cu AC. Avem $\widehat{ABD} = \widehat{ADT}$ și $\widehat{CBD} = \widehat{CAD}$ ca avînd aceeași măsură. Rezultă $TD \| AC$ și deci TD, AC și BM sînt paralele. Notînd cu BP tangenta la cerc în M, din cauză că triunghiul OBD este isoscel, tangentele BD și DT sînt egal înclinate față de BD, dar în sens contrar. Rezultă atunci că simetrica lui BM prin raport cu BD este o dreaptă fixă: tangenta BP la cerc, în punctul fix B. ● **70**. Fie $P = (M_1N_1 \cap BC)$, $Q = (M_2N_2 \cap AC)$, $R = (M_3N_3 \cap AB)$ (Fig. 1.70), teorema lui Menelaus, aplicată punctelor M_1, N_1, P coliniare în triunghiul ABC, ne dă

$$\frac{AM_1}{BM_1} \cdot \frac{BP}{CP} \cdot \frac{CN_1}{AN_1} = 1.$$

Notînd cu $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, laturile triunghiului și cu r raza cercurilor, din relația precedentă, avem

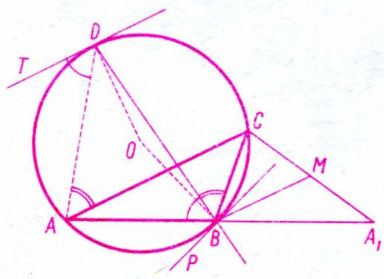


Fig. 1.69

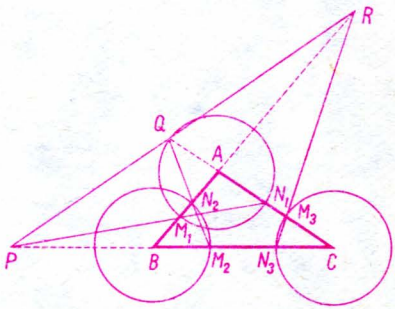


Fig. 1.70

$$\frac{BP}{CP}=\frac{c-r}{b-r}\cdot\frac{r}{r}=\frac{c-r}{b-r}.$$

Analog pentru secantele QN_2M_2 și RM_3N_3 avem

$$\frac{QC}{QA}=\frac{a-r}{c-r},\quad \frac{RA}{RB}=\frac{b-r}{a-r}$$

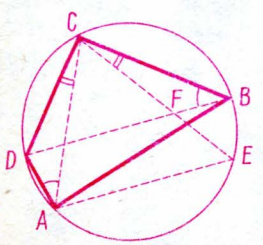
așa că

$$\frac{BP}{CP}\,\frac{QC}{QA}\,\frac{RA}{RB}=1,$$

deci punctele P, Q și R sînt coliniare. ● **71.** 1°. Din asemănarea triunghiurilor ADC și FBC (Fig. 1.71 a, b) se deduce relația întîia și din asemănarea triunghiurilor DFC și ABC relația a doua. 2°. Prin adunarea membru cu membru a celor două relații se obține teorema lui Ptolemeu

$$BD\cdot AC=AD\cdot BC+AB\cdot CD.$$

3°. $DB\cdot AC=AD\cdot BC-AB\cdot CD$, deci F este mai aproape de D decît de B și cu semn schimbat în partea a doua în caz contrar. ● **72.** Notînd cu B unul din punctele de intersecție a cercurilor cu centrele O și O', fie ABC o secantă ce trece prin B (Fig. 1.72). Dacă xBx' și yBy' sînt tangentele în B la cele două cercuri, secanta poate fi în unghiul xBy'. În acest caz lungimea ei, care este suma celor două corzi AB și BC, este egală cu dublul distanței dintre mijloacele M_1, M_2 ale celor două corzi. Ori această distanță este mai mică sau egală cu distanța dintre centrele cercurilor. Dacă secanta este în unghiul xBy, capetele ei se află pe același cerc și lungimea ei este cea mai mare cînd coincide



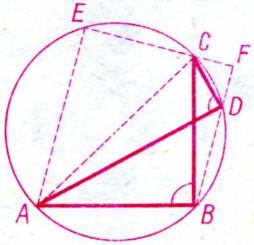


Fig. 1.71

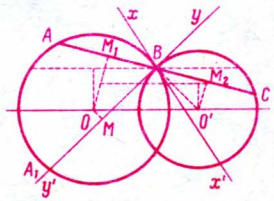


Fig. 1.72

cu By' (dacă raza cercului O este mai mare decît a celuilalt cerc). Dar jumătatea ei BM este mai mică sau cel mult egală cu distanța OO'.

● **73.** Fie (O) cercul circumscris triunghiului ABC (Fig. 1.73). Polara lui A' în raport cu (O) se confundă cu cea a lui A' în raport cu unghiul

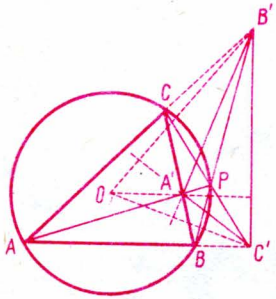


Fig. 1.73

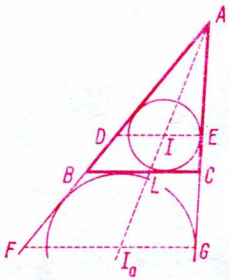


Fig. 1.74

$\widehat{BC'C}$, deoarece acestea au două puncte comune: conjugatul armonic al lui A' față de A, P și față de B, C, perechi de puncte care sînt simultan și pe cercul (O) și pe laturile unghiului $\widehat{AC'C}$. Ori, polara lui A' în raport cu unghiul $\widehat{BC'C}$ este dreapta $B'C'$; această dreaptă este deci de asemenea polara lui A' în raport cu cercul (O), deci $B'C'$ este perpendiculară pe $A'O$ care este prin urmare înălțime a triunghiului $A'B'C'$. La fel, polara lui C' în raport cu cercul (O) este dreapta $A'B'$, prin urmare OC' este perpendiculară pe $A'B'$ și deci este înălțime a triunghiului $A'B'C'$. Deducem deci de aici că centrul O al cercului circumscris triunghiului ABC este punctul de intersecție al înălțimilor triunghiului $A'B'C'$. ● **74.** Notăm cu L intersecția bisectoarei unghiului $\hat{A}$ cu latura BC (Fig. 1.74). Bisectoarele BI și BI_a ale unghiului $\widehat{ABC}$, sînt conjugate armonic față de laturile BA și BC așa că și punctele I și I_a sînt conjugate armonic față de segmentul AL, deci $\frac{1}{AI}+\frac{1}{AI_a}=\frac{2}{AL}$. Din asemănarea triunghiurilor ADE și AFG cu triunghiul ABC rezultă și asemănarea lor deci

$$\frac{AI}{DE}=\frac{AI_a}{FG}=\frac{AL}{BC}.$$

● **75.** Să presupunem că cercurile sînt tangente exterioare (Fig. 1.75).

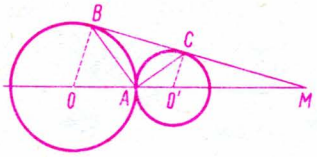


Fig. 1.75

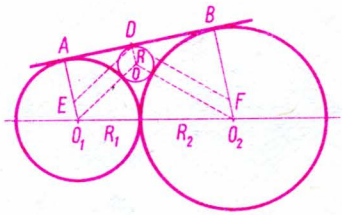


Fig. 1.77

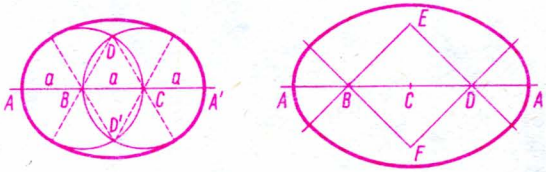


Fig. 1.76

Cum unghiurile $\widehat{OAB}$ și $\widehat{O'AC}$ sînt complementare și triunghiurile OAB, $O'AC$ sînt isoscele, rezultă $OB \parallel O'C$. Din triunghiurile asemenea $MO'C$ și MOB (M intersecția dreptei BC cu OO'), găsim $MO' = R(R+R')/(R-R')$, deci M nu depinde decît de razele cercurilor. Problema se rezolvă analog cînd cercurile sînt tangente interior. ● **76.** $S_1 = 2\pi a^2 - \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$, $S_2 = \pi a^2(2+\sqrt{2}) - 2a^2$ (Fig. 1.76 a, b). ● **77.** Notăm cu O_1, O_2 centrele și cu R_1, R_2 razele celor două cercuri tangente exterioare (Fig. 1.77) și O centrul și R raza cercului tangent la cercurile date și la tangenta lor comună. Prin punctul D de tangență al cercului căutat cu AB ducem paralelele DE și DF la O_1O și O_2O, mărginindu-le la razele de tangență. Avem $AD = 2\sqrt{RR_1}$, $DB = 2\sqrt{RR_2}$. Din $AB = 2\sqrt{R_1R_2} = AD + DB = 2\sqrt{RR_1} + 2\sqrt{RR_2}$, avem

$$\sqrt{R} = \frac{\sqrt{R_1R_2}}{\sqrt{R_1}+\sqrt{R_2}}.$$

● **78.** Notînd cu O_1, O_2 și O_3 centrele celor trei cercuri de raze 1, 2 și

3 și cu O centrul și r raza cercului căutat (Fig. 1.78), observăm întîi că triunghiul $O_1O_2O_3$ este dreptunghic în O_1. Avem apoi $OO_1=1+r$, $OO_2=2+r$, $OO_3=3+r$. Notînd cu x și y proiecția segmentului OO_1 pe O_1O_3 și O_1O_2, avem $x^2+y^2=(1+r)^2$, $x^2+(3-y)^2=(2+r)^2$, $(4-x)^2+y^2=(3+r)^2$. Obținem $x=1-\frac{r}{2}$, $y=1-\frac{r}{3}$, care înlocuite în una din ecuațiile precedente, ne dau $23r^2+132r-36=0$, care are singura rădăcină pozitivă $r=\frac{6}{23}$. ● **79.** Vom ține seama că pentru două cercuri tangente, linia centrelor trece prin punctul de tangență. Notînd cu O_1 și O_2 centrele celor două cercuri (Fig. 1.79) și cu r_1, r_2 razele lor, în triunghiurile OO_1C și OO_1A, avem $OO_1=R-r_1$, $OC=r_1$, $AO_1=R+r$, $AC=R-r$ și exprimînd din amîndouă pe O_1C, avem $r_1=\frac{R}{8}$. Triunghiul OO_2A este isoscel, căci $OO_2=O_2A=R-r_2$. Cum $DO_2=r_2$ și $OD=\frac{R}{2}$, din triunghiul OO_2D avem $r_2=\frac{3}{8}R$. ● **80.** Notînd $AB=4R$ și cu O, O_1, O_2, O_3 centrele, iar cu $2R$, R, R și r razele cercurilor (Fig. 1.80), din triunghiul dreptunghic OO_1O_3, avem $r=\frac{2R}{3}$. **81.** Să notăm cu O centrul cercului

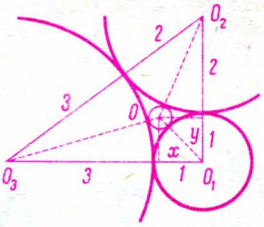


Fig. 1.78

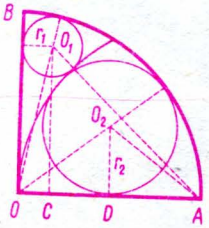


Fig 1.79

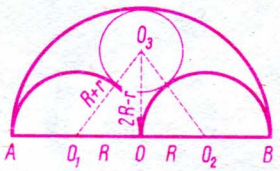


Fig. 1.80

cu diametrul AB și cu O_1, O_2 centrele cercurilor de raze R și r. Fie O_3 centrul și x raza cercului înscris în triunghiul curbiliniu mărginit de cele trei semicercuri (Fig. 1.81). Notînd $OM=y$, unde M este proiecția lui O_3 pe AB, din triunghiurile OO_1O_3 și OO_3O_2, avem $(R+x)^2=(R+r-x)^2+r^2+2ry$; $(r+x)^2=(R+r-x)^2+R^2-2Ry$. Eliminînd pe y, găsim

$$x=\frac{Rr(R+r)}{R^2+Rr+r^2}.$$

● **82.** Notînd $2R=x$ (Fig. 1.82) pe baza teoremei lui Ptolemeu avem $AC\cdot BD=AD\cdot BC+AB\cdot CD$, deci $\sqrt{x^2-a^2}\sqrt{x^2-c^2}=bx+ac$, deci $x^3-(a^2+b^2+c^2)x-2abc=0$, așa că ecuația căutată este $4R^3-(a^2+b^2+c^2)R-abc=0$. ● **83.** În cercul cu raza R și centrul O (Fig. 1.83), se iau corzile AB și AC de lungimi a și b. Notînd cu D și E mijloacele

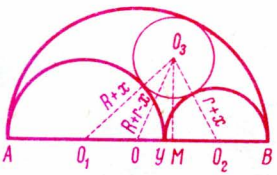


Fig. 1.81

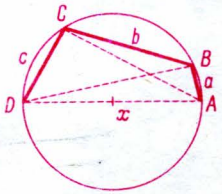


Fig. 1.82

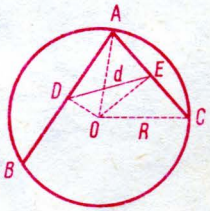


Fig. 1.83

corzilor, avem $DE=d$. Rezultă

$$OD=\sqrt{R^2-\frac{a^2}{4}},\quad OE=\sqrt{R^2-\frac{b^2}{4}}.$$

Cum patrulaterul $ADOE$ este inscriptibil avem

$$Rd=\frac{a}{2}\sqrt{R^2-\frac{b^2}{4}}+\frac{b}{2}\sqrt{R^2-\frac{a^2}{4}},$$

din care se obține

$$R=\frac{2abd}{\sqrt{16a^2d^2-(4d^2+a^2-b^2)^2}}.$$

● **84.** Luînd pe cercul cu rază $R>r$, punctul variabil A și notînd cu F proiecția lui pe diametrul fix $BDEC$, dacă $BF=x$, avem $AF^2=x(2R-x)$ și $AD^2=AF^2+FD^2$, $AE^2=AF^2+(FD+DE)^2$, de unde $AD^2+AE^2=2R^2+2r^2$. Proprietatea se menține, dacă punctul variabil se găsește pe cercul cu raza r (Fig. 1.84). ● **85.** Exprimînd în două feluri dublul ariilor triunghiurilor CME, CNF, CMN, CEF, care au aceeași înălțime h, coborîtă din punctul C (Fig. 1.85) avem $h\cdot ME=CM\cdot CE\cdot \sin \widehat{ACE}$, $h\cdot NF=CN\cdot CF \sin \widehat{BCF}$, $h\cdot MN=CM\cdot CN \sin \widehat{ACB}$, $h\cdot EF=CE\cdot CF \sin \widehat{ECF}$.

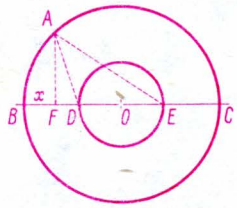


Fig. 1.84

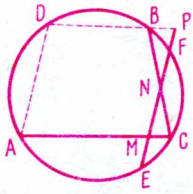


Fig. 1.85

Rezultă atunci

$$\frac{ME\cdot NF}{MN\cdot EF}=\frac{\sin \widehat{ACE}\cdot \sin \widehat{BCF}}{\sin \widehat{ACB}\cdot \sin \widehat{ECF}}=\text{const.}$$

deci

$$\frac{ME\cdot NF}{MN}=\text{const.}$$

● **86.** Fie I punctul de intersecție al tangentelor la cerc în A și A'. Avem $AI=A'I$ (Fig. 1.86). Aplicînd teorema lui Menelaus pentru triunghiul ICC' și transversala ADA', avem

$$\frac{AC}{AI}\,\frac{DC'}{DC}\,\frac{A'I}{A'C'}=1, \text{ deci } \frac{DC}{DC'}=\frac{AC}{A'C'}.$$

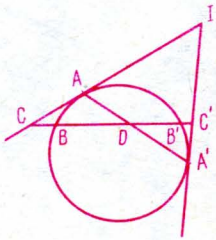


Fig. 1.86

● **87.** Notînd cu R raza cercului și cu $a=OM=ON$, avem (Fig. 1.87)

$$\frac{AM}{MB}+\frac{AN}{NC}=\frac{AM^2}{MB\cdot AM}+\frac{AN^2}{NC\cdot AN}.$$

Dar $AM\cdot MB=EM\cdot MD=(R+a)(R-a)=R^2-a^2$ și analog $NC\cdot AN=R^2-a^2$. Pe de altă parte ținînd seama că AO este mediană în triunghiul AMN, avem $AM^2+AN^2=2AO^2+2OM^2=2(R^2+a^2)$, deci

$$\frac{AM}{MB}+\frac{AN}{NC}=\frac{2(R^2+a^2)}{R^2-a^2}.$$

● **88.** Să notăm cu O' centrul cercului de rază r, cu E punctul de tangență al lui cu raza OB și cu D mijlocul corzii AB (Fig. 1.88). Din triun-

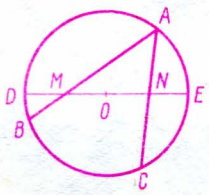


Fig. 1.87

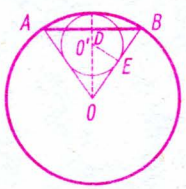


Fig. 1.88

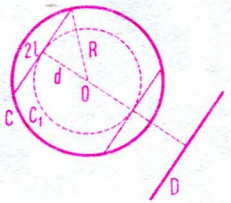


Fig. 1.89

ghiurile ODB și $OO'E$, avem $\frac{R}{R-r}=\frac{c}{r}$, sau $\frac{c}{r}=\frac{R+c}{R}$, de unde rezultă $\frac{1}{r}=\frac{1}{R}+\frac{1}{c}$. ● **89.** Fiind dat cercul C cu centrul în punctul O și de rază R (Fig. 1.89) orice coardă de lungime $2l$ se găsește la distanța $d=\sqrt{R^2-l^2}$ de centrul O, deci toate aceste cercuri sînt tangente la un cerc C_1 cu centrul O și raza d. Coarda de lungime $2l$ paralelă cu dreapta dată D este tangentă la cercul C_1, punctul de tangență fiind intersecția cercului C_1 cu perpendiculara din O pe dreapta D. Avem două soluții. ● **90.** Proiectînd punctul C pe OA și OB, obținem punctele E și F. Avem $PC=\sqrt{2}EC=\sqrt{2}\,OF$, $CQ=\sqrt{2}CF$, deci $PC^2+CQ^2=2(OF^2+FC^2)=$

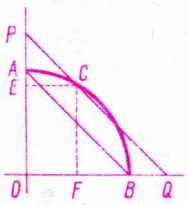


Fig. 1.90

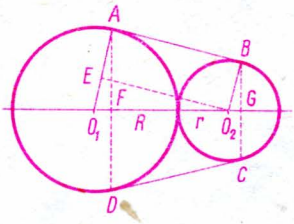


Fig. 1.91

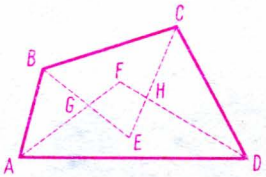


Fig. 1.92

$=2OC^2=2OB^2=AB^2$ (Fig. 1.90). ● **91.** Fie AB și CD tangentele comune la două cercuri cu centrele O_1, O_2 (Fig. 1.91) și razele R și r. Dreptele AD și BC sînt paralele și taie linia centrelor în F și G. În triunghiul dreptunghic O_1O_2E (unde EG este paralelă la AB), avem $O_1E=R-r$, $O_1O_2=R+r$, $EG=2\sqrt{Rr}$. Triunghiurile O_1O_2E, AO_1F, O_2GB sînt asemenea căci sînt dreptunghice și mai au încă un unghi ascuțit egal. Obținem

$$AF=\frac{2R\sqrt{Rr}}{R+r}, \qquad O_1F=\frac{R(R-r)}{R+r}$$

$$BG=\frac{2r\sqrt{Rr}}{R+r}, \qquad O_2F=\frac{r(R-r)}{R+r}$$

$$h=FG=O_1O_2-O_1F=O_2G=\frac{4Rr}{R+r},$$

deci aria căutată este $\frac{4(Rr)^{3/2}}{R+r}$. ● **92.** (Fig.1. 92).

● **93.** Dacă triunghiul este ABC (Fig. 1.93) notăm $AB=2c$, $BC=2a$, $CA=2b$ și cu M, N, P mijloacele acestor laturi, deci $MN=b$, $NP=c$, $PM=a$. Dacă tangentele comune, limitate la punctele de tangență, sînt T_1T_2, T_3T_4 și T_5T_6, atunci din trapezele dreptunghice MT_1T_2N,

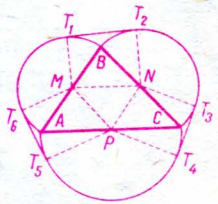


Fig. 1.93

NT_3T_4P și PT_5T_6M, cu $2p=2(a+b+c)$, avem $T_1T_2^2=MN^2-(NT_2-MT_1)^2=b^2-(a-c)^2=(b-a+c)(b+a-c)=(p-2a)(p-2c)$, $T_3T_4^2=(p-2b)(p-2a)$, $T_5T_6^2=(p-2c)(p-2b)$. Deci

$$\frac{1}{T_1T_2^2}+\frac{1}{T_3T_4^2}+\frac{1}{T_5T_6^2}=\frac{3p-2(a+b+c)}{(p-2a)(p-2b)(p-2c)}=$$

$$=\frac{p}{(p-2a)(p-2b)(p-2c)}=\frac{p^2}{p(p-2a)(p-2b)(p-2c)}=\frac{p^2}{S^2}=\frac{1}{r^2},$$

unde S este aria triunghiului și r raza cercului înscris. ● **94.** Notînd cu r raza celor trei cercuri înscrise, centrele acestor cercuri O_1, O_2, O_3 formează un triunghi echilateral cu latura $2r$ (Fig. 1.94). Mediana lui este $O_1B=r\sqrt{3}$ și $OO_1=\frac{2\sqrt{3}}{3}r$, O fiind centrul de greutate al triunghiului $O_1O_2O_3$ și totodată centrul cercului cu raza R. Avem $AO=R=\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}+1\right)r$, deci $r=(2\sqrt{3}-3)R$. Aria triunghiului curbiliniu este egală cu diferența dintre aria triunghiului $O_1O_2O_3$ și a celor trei sectoare circulare din cercurile cu raza r și avînd fiecare unghiul la centru $\frac{\pi}{6}$, deci avînd fiecare aria $\frac{r^2}{6}$. Aria căutată este $\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}\right)r^2=\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}\right)(2\sqrt{3}-3)^2R^2$. 2°. Notînd cu O' centrul și cu r' raza cercului căutat, avem $BO_2=r$, $O_2O'=r+r'$, $OB=\frac{\sqrt{3}}{3}r$, $BO'=R-\frac{\sqrt{3}r}{3}-r'$. Din triunghiul dreptunghic O_2BO', găsim $r'=\frac{R(2\sqrt{3}-1)}{11}$. ● **95.** 1°. $OCHB$ este trapez dreptunghic (Fig. 1.95) în care AA_1 este linie mijlocie, deci $CA_1=A_1H$ și triunghiul ACH este

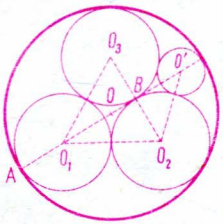


Fig. 1.94

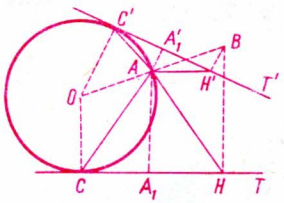


Fig. 1.95

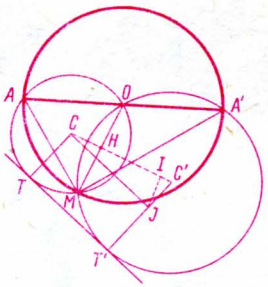


Fig. 1.96

isoscel. Rezultă $\widehat{ACH}=\widehat{AHC}$, sau $\widehat{OCA}=\widehat{AHB}$, deci AA_1 este axă de simetrie a celor două unghiuri. Cum $\widehat{OAH}=\widehat{OAC}+\widehat{CAA_1}+\widehat{A_1AH}$ și cum fiecare din aceste unghiuri este egal cu $\widehat{AHB}$, rezultă că $\widehat{OAH}=3\cdot\widehat{AHB}$. 2°. În cazul al doilea $C'A_1'=A_1'H$, deci $\widehat{AH'C'}=\widehat{AC'A_1'}$. Se arată că $\widehat{OAH'}=3\cdot\widehat{AH'B}-2\text{dr}$. ● **96.** 1°. Triunghiurile MOA, MOA' (Fig. 1.96) sînt isoscele, centrele C, C' ale cercurilor circumscrise se află pe bisectoarele unghiurilor $\widehat{MOA}$, $\widehat{MOA'}$; aceste bisectoare fiind perpendiculare, cercurile se taie ortogonal. 2°. Linia centrelor CC' este perpendiculară pe coarda comună OM în mijlocul său H. Scriind în două feluri aria triunghiului OCC', a cărei înălțime este $OH=\frac{R}{2}$, avem

$$S=\frac{R}{4}\sqrt{r^2+r'^2}=\frac{rr'}{2},\ \text{deci}\ \frac{1}{r^2}+\frac{1}{r'^2}=\frac{4}{R^2}.$$

3°. Dacă TT' este tangenta comună la cercurile (C) și (C'), ducem CJ egală și paralelă cu TT'. Proiecția căutată este CI, unde I este piciorul perpendicularei coborîtă din J pe CC'. Din triunghiul dreptunghic $CC'J$, avem

$$CI=\frac{CJ^2}{CC'}=\frac{2rr'}{\sqrt{r^2+r'^2}}$$

și din formula de la 1°, rezultă $CI=R$. ● **97.** Dreptele OA, OB, tangente la cercul dat, formează unghiuri egale cu AB, deci și cu MN (Fig. 1.97). Avem deci $\widehat{NOB}=\widehat{AOM}$. Unghiurile $\widehat{OAM}=\widehat{ABP}$ având

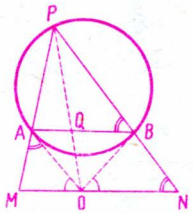


Fig. 1.97

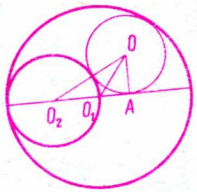


Fig. 1.98

aceeași măsură în cercul dat. Cum $\widehat{ABP}=\widehat{ONB}$, rezultă $\widehat{OAM}=\widehat{ONB}$, deci $\triangle OAM\sim\triangle ONB$ ca având două unghiuri respectiv egale. Deducem $\frac{OM}{OA}=\frac{OB}{ON}$, sau $OM\cdot ON=OA\cdot OB$ și prin urmare $OM\cdot ON=OA^2$. Triunghiurile PAB, PMN fiind omotetice prin omotetia de centru P și de raport $\frac{PA}{PM}$, urmează că cercurile lor circumscrise sînt omotetice în aceeași omotetie și deci cercul PMN este tangent în P cercului dat.

● **98.** Fie R și $\frac{R}{2}$ razele celor două cercuri și O_1, O_2 centrele lor (Fig. 1.98). Notînd cu O centrul cercului căutat, cu x raza lui și cu $y=O_1A$ proiecția pe diametrul O_1O_2 a segmentului O_1O. Avem

$$\left(\frac{R}{2}+x\right)^2=\left(\frac{R}{2}+y\right)^2+x^2;\quad (R-x)^2=y^2+x^2,$$

de unde $y=\frac{R}{3}$ și $x=\frac{4R}{9}$. ● **99.** În triunghiul echilateral ABC de latură

a (Fig. 1.99) se înscriu trei cercuri două cîte două tangente și de rază r și centre O_1, O_2, O_3. Proiectînd pe O_1 și O_3 pe AB se obțin punctele E și D. Avem

$$AE=r\sqrt{3} \text{ și } AD=AE+ED=r\sqrt{3}+r=\frac{a}{2},$$

deci $r=\frac{1}{4}a(\sqrt{3}-1)$. Aria S căutată se obține scăzînd din aria triunghiului echilateral $O_1O_2O_3$ aria a trei sectoare egale cu unghi de 60° la vîrf. Avem

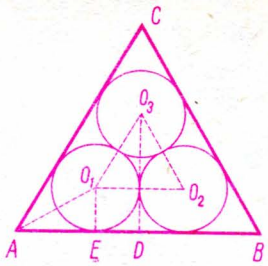


Fig. 1.99

$$S=\frac{(2\sqrt{3}-\pi)}{2}r^2=\frac{(2\sqrt{3}-\pi)(2-\sqrt{3})}{16}a^2.$$

● **100.** Să notăm cu A' simetricul lui A față de mijlocul M al lui BC (Fig. 1.100) și fie E, F, D intersecțiile perpendicularei în O pe AO cu cercul și cu dreapta BC. Unghiul $\widehat{ABF}$ este de 45°, căci subîntinde arcul $\widehat{AF}$, care este a patra parte din tot cercul. Triunghiul ABI (unde I este intersecția lui BF cu AC) este isoscel și dreptunghic, căci unghiurile din A și B sînt de 45°. Deci BI este înălțime în triunghiul ABC. Analog, EC este înălțime a aceluiași triunghi. Intersecția lor ne dă ortocentrul H al triunghiului ABC. Observăm apoi că arcele $\widehat{BC}$, $\widehat{FA}$ și $\widehat{AE}$ se văd din O sub unghi drept, deci sînt egale. Rezultă atunci că EB este paralelă cu AC și AB este paralelă cu CF. Prelungind pe EB și CF, acestea se taie într-un punct A''. Patrulaterul $ABA''C$ este un paralelogram. Dar diagonalele acestuia se intersectează la mijlocul lor, deci mijlocul M al lui BC. Deducem de aici că A'' coincide cu A'. Astfel în patrulaterul înscris $BEFC$, diagonalele se taie în H și laturile opuse în A' și D. Rezultă (§ 3.2.2.) că $A'D$ este polara lui H față de cerc și deci este perpendiculară pe OH. ● **101.** Presupunem că este dus segmentul MN de lungime

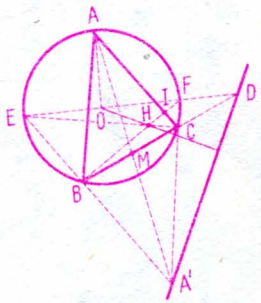
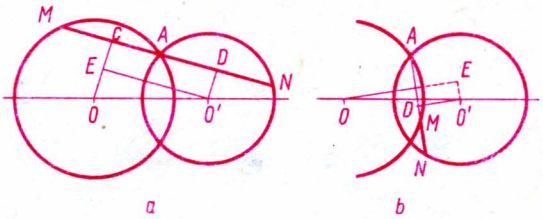


Fig. 1.100

$2k$ (Fig. 1.101, *a*, *b*). Printr-unul dintre centre, de exemplu O' ducem o paralelă $O'E$ la MN pînă întîlnește perpendiculara OC pe MN. Rezultă $O'E=k$. Deducem că E se găsește la intersecția cercului cu diametrul OO' și a cercului cu centrul în O' și raza k. Odată construit segmentul $O'E$, se duce prin A o paralelă la $O'E$. Punctele de intersecție cu cercurile date, dau segmentul MN căutat. Dacă avem $k<OO'$ avem două puncte de intersecție E și E', deci avem două soluții care corespund la două drepte ce trec prin A și sînt simetrice față de paralela dusă



a *b*

Fig. 1.101

prin A la linia centrelor. Dacă $k=0$, M și N se confundă în al doilea punct de intersecție a celor două cercuri. Dacă $k=OO'$, punctul E coincide cu O și MN este paralelă cu linia centrelor. Dacă $k>OO'$ nu avem soluții. ● **102.** Notînd $\sphericalangle FOM=x$, avem $\sphericalangle MDA=\sphericalangle MAH=2x$, căci prin ipoteză $MD=MA$. Unghiul înscris $\widehat{MAH}$ fiind dublul unghiului la centru FOM, avem arc $\overset{\frown}{MH}=4$ arc $\overset{\frown}{FM}$. Triunghiurile isoscele ODA și OAH au aceleași unghiuri la bază, deci $\sphericalangle AOH=\sphericalangle ODA$, așa că arc $\overset{\frown}{AH}=2$ arc $\overset{\frown}{FM}$. Rezultă

$$\text{arc } \overset{\frown}{FM}+\text{arc } \overset{\frown}{MH}+\text{ arc } \overset{\frown}{AH}=7 \text{ arc } \overset{\frown}{FM}=\frac{\pi}{2},$$

deci

$$\text{arc } \overset{\frown}{FM}=\frac{\pi}{14},\ \text{arc } \overset{\frown}{AH}=\frac{\pi}{7},\ \text{arc } \overset{\frown}{MH}=\frac{2\pi}{7}$$

și rezultă laturile poligoanelor regulate cu 7, 14, și 28 laturi (MH, AH, FM). ● **103.** Semicercul înscris în triunghiul ABC este tangent la triunghi în L, Q și întîlnește diametrul BC în B_1, C_1 și dreptele OM, ON în S și T. Avem

$$\text{măs} \sphericalangle ABC = \frac{\text{arc } LPC_1 - \text{arc } B_1L}{2} = \frac{\text{arc } LPQ + \text{arc } QC_1 - \text{arc } B_1L}{2} =$$

$$= \frac{2\,\text{arc}SP + 2\,\text{arc}TP}{2} = \text{arc}ST = \text{măs} \sphericalangle MON.$$

Cum $\sphericalangle BMO = \sphericalangle OMN$ și $\sphericalangle MNO = \sphericalangle ONC$, triunghiurile OBM, OMN și ONC sînt asemenea. Din primul și ultimul, ținînd seama că $OB = OC$, avem $OB^2 = BM \cdot CN$. ● **104.** Din triunghiurile dreptunghice CO_1B și CBO (Fig. 1.104) avem $CB^2 = O_1C^2 - O_1B^2 = OC^2 - (5 - O_1B)^2$, de unde $O_1B = \frac{9}{10}$. Din triunghiul dreptunghic OAO_1, avem $O_1E = \frac{9}{5}$ și $AE = \frac{12}{5}$.

Din triunghiurile asemenea O_1BF și O_1EA, avem $FB = \frac{6}{5}$.

● **105.** Notăm cu c și C proiecțiile centrelor pe AB (Fig. 1.105). Ducînd prin o o paralelă oD la AB ($D \in OC$), din triunghiul dreptunghic oOD, avem $R = d + r - 2\sqrt{dr}$, căci cealaltă valoare fiind mai mare decît d, nu corespunde. Pentru a găsi grafic poziția punctului C, observăm că trebuie să construim un segment de lungime $2\sqrt{dr}$, pe care să-l scădem dintr-un segment de lungime $d + r$. Se știe că lungimea tangentei exterioare

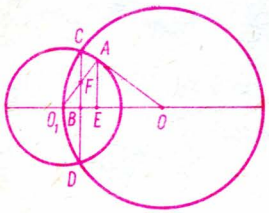


Fig. 1.104

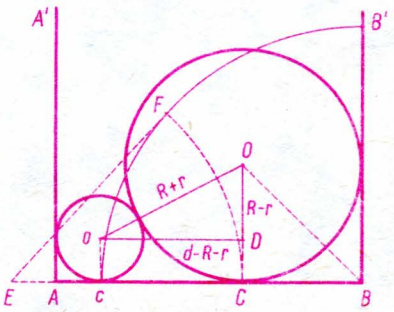


Fig. 1.105

comune a două cercuri tangente exterior de raze d și r este $2\sqrt{dr}$, deci vom începe cu construirea acestei tangente comune, sau ceea ce este totuna, cu a tangentei EF dusă dintr-un punct E aflat la distanța $d+r$ de centrul unui cerc cu raza $d-r$ și cu centrul în B. Luînd $EF=EC$, rezultă $R=CB$. Centrul O se găsește pe bisectoarea unghiului $\widehat{ABB'}$.

● **106.** 1°. $BC=R\ \mathrm{tg}\omega$, $ED=\dfrac{R}{\mathrm{tg}\ 2\omega}$, $OD=\dfrac{R}{\sin 2\omega}$. Perimetrul este $y=R\left(1+2\ \mathrm{tg}\omega+\dfrac{1}{\mathrm{tg}\,\omega}\right)$.

2°

OD	R	$\dfrac{3R\sqrt{2}}{4}$	$+\infty$
y	$4R\searrow$	$R(1+2\sqrt{2})\nearrow$	$+\infty$
		min	

3°. $OD=\dfrac{15}{4}(4-\sqrt{2})$. Cum minimul are loc pentru $\mathrm{tg}\,\omega=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, deci $\mathrm{tg}\,\widehat{ODC}=2\sqrt{2}$. Apoi $y=35$ m. ● **107.** 1°. Din triunghiul ABC avem

$$CE^2=AE\cdot EB=x(2R-x).$$

Din triunghiul dreptunghic ATE, găsim

$$TE^2=EI\cdot EA=EI(2R-x).$$

Cum $TE=CE$, ca fiind raze ale aceluiași cerc, rezultă $EI=x$, deci $EI=EB$. 2°. Din același triunghi ATE, avem

$$TI^2=AI\cdot IE=2x(R-x),$$

deci aria triunghiului ATT' este

$$S=2(R-x)\sqrt{2x(R-x)}.$$

● **108.** A. 1°. $4x+4y=4a$, $x^2+y^2=R^2$, avem două soluții:

$$x=\frac{a\pm\sqrt{2R^2-a^2}}{2},\quad y=\frac{a\mp\sqrt{2R^2-a^2}}{2}.$$

Ca problema să fie posibilă trebuie ca $R<a\leqslant R\sqrt{2}$. Dacă $a=R\sqrt{2}$, drept-

unghiul este un pătrat cu latura a. 2°. Cum $x=R\sin u$, $y=R\cos u$ $\left[u\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right]$, ecuația care dă pe u este $\sin u+\cos u=\frac{a}{R}=m$. Ea se scrie $\sin\left(u+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}\,m}{2}$ și trebuie să avem $\frac{\sqrt{2}}{2}m=\frac{\sqrt{2}\,a}{2R}\leqslant 1$, ceea ce este îndeplinit. 3°. Pe semidiametri perpendiculari OS și OT luăm două puncte M și N la distanța a de punctul O. Cele două puncte de intersecție ale cercului cu centrul în O și raza R cu dreapta MN, ne dau cîte un vîrf al celor două dreptunghiuri. B. Avem

$$l=R(\sin u+\cos u)=R\sqrt{2}\sin\left(u+\frac{\pi}{4}\right).$$

Graficul este arcul dintr-o sinusoidă cu amplitudinea $R\sqrt{2}$ pentru care $u\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. ● **109.** Avem $s_n=\frac{1}{2}nR^2\sin\frac{2\pi}{n}$, $S_n=nR^2\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$ și apoi

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{s_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{nR^2\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}{nR^2\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}}=1,$$

deci cele două arii au aceeași limită. Aceasta se poate găsi ușor, căci de exemplu avem

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}nR^2\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\pi}\sin\frac{\pi}{n}\right)\left(\pi R^2\right)\cos\frac{\pi}{n}=\pi R^2.$$

● **110.** Fie I_a și I_b centrele cercurilor (I_a), (I_b) exînscrise în unghiurile A și B și fie E, F punctele unde AB este tangentă la aceste cercuri. Axa radicală a cercurilor (I_a), (I_b) fiind perpendiculară pe linia centrelor I_aI_b, este paralelă cu bisectoarea interioară a unghiului $\widehat{BCA}$ (I_aI_b este chiar bisectoarea exterioară) și prin urmare cu bisectoarea interioară a unghiului $\widehat{B'C'A'}$ (vezi paralelogramul $C'A'CB'$). Axa radicală trece prin mijlocul tangentei comune EF și cum $AE=BF$ acesta este și mij-

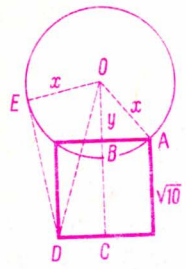


Fig. 1.111

locul lui AB deci C'. În consecință axa radicală a cercurilor (I_a) și (I_b) coincide cu bisectoarea interioară a unghiului $\widehat{B'C'A'}$. Se arată analog că axa radicală a cercurilor (I_b) și (I_c) este bisectoarea interioară a unghiului $\widehat{B'A'C'}$. În consecință, centrul radical al cercurilor exînscrise triunghiului ABC este centrul cercului înscris în triunghiul $A'B'C'$. ● **111.** Latura pătratului este $\sqrt{10}$. Notăm $x=OA$, $y=OB$ (Fig. 1.111). Din triunghiurile dreptunghice OAB, OCD și ODE avem $x^2=y^2+\frac{10}{4}$, $(y+10)^2+\frac{10}{4}=x^2+40$. Găsim $x=5$. ● **112.** ● **113.** Cum lungimea tangentei exterioare comune este $2\sqrt{Rr}$, segmentul căutat are lungimea $\sqrt{Rr}$, căci din punctul de intersecție al celor două tangente comune se duc tangente egale la cele două cercuri. ● **114.** Fie ω centrul cercului circumscris triunghiului $MO'N$, P proiecția lui O' pe $O\omega$ și Q mijlocul lui MN (Fig. 1.114). În triunghiurile ωMO și $\omega OO'$ avem relațiile

$$\omega M^2=\omega O^2+OM^2-2\omega O\cdot OQ \tag{1}$$

$$\omega O'^2=\omega O^2+OO'^2-2\omega O\cdot OP \tag{2}$$

Cum $\omega M=\omega O'$ membrul II al celor două egalități este egal deci

$$OM^2-2O\omega\cdot OQ=OO'^2-2O\omega\cdot OP$$

sau, notînd cu R raza OM și cu d lungimea OO'

$$R^2-2O\omega\cdot OQ=d^2-2O\omega\cdot OP \text{ și}$$

$$R^2-d^2=2O\omega(OQ-OP)=2O\omega\cdot PQ. \tag{3}$$

Fie S punctul de tangență la cercul (O'). Avem $PQ=O'S$ și relația (3) ne va da

$$O\omega=\frac{R^2-d^2}{2\cdot O'S}=\left|\frac{R^2-d^2}{2R'}\right|$$

unde am notat cu R' raza cercului (O'). Acest rezultat este independent de poziția cercului (O') în raport cu cercul (O) deci ω se deplasează

pe un cerc (c) care are ca centru punctul O și ca rază $\left|\frac{R^2-d^2}{2R'}\right|$. Raționamentul precedent nu presupune neapărat că cercul (O') să fie interior cercului (O). ● **115.** 1°. Dreptele EE_1 și FF_1 fiind perpendiculare pe AH, sînt paralele și paralele cu BC (Fig. 1.115). Aplicînd teorema lui Menelaus triunghiului AEH (secanta BMF_1) și triunghiului AE_1C (secanta HNF), avem

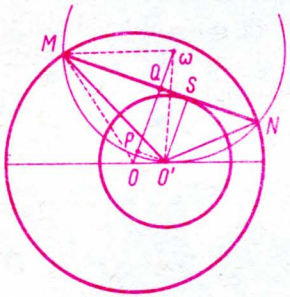


Fig. 1.114

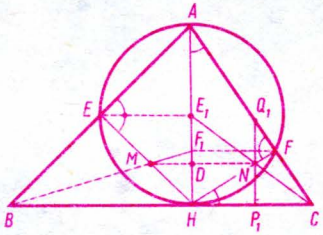


Fig. 1.115

$$\frac{[ME]}{[MH]}\cdot\frac{[F_1H]}{[F_1A]}\cdot\frac{[BA]}{[BE]}=1,\quad \frac{[NE_1]}{[NC]}\cdot\frac{[FC]}{[FA]}\cdot\frac{[HA]}{[HE_1]}=1.$$

Dar

$$\frac{[F_1H]}{[F_1A]}=\frac{[FC]}{[FA]}\text{ și }\frac{[BA]}{[BE]}=\frac{[HA]}{[HE_1]},\text{ așa că }\frac{[ME]}{[MH]}=\frac{[NE_1]}{[NC]},$$

deci MN este paralel cu BC. 2°. Putem scrie $EM\cdot MH=\frac{EM}{EH}\cdot MH\cdot EH$.

Avem apoi

$$\frac{EM}{EH}=\frac{E_1D}{E_1M}=\frac{DN}{HC}\text{ și }HM\cdot HE=HN\cdot HF.$$

Dacă notăm proiecția lui N pe BC cu P_1 și cu Q_1 intersecția lui NP_1 cu AC, avem $HN\cdot HF=HP_1\cdot HC$, deci $HM\cdot HE=HP_1\cdot HC=DN\cdot HC$ și prin urmare

$$EM \cdot MH = \frac{DN}{HC} \cdot DN \cdot HC = DN^2.$$

● **116.** 1°. Ca problema să fie posibilă trebuie ca $l < 2R$. În cerc sînt o infinitate de coarde care să aibă lungimea l, toate fiind la aceeași depărtare de centrul cercului. Se construiește una din aceste coarde și apoi se construiește cercul concentric cu cel dat și cu raza cît distanța de la centrul cercului dat pînă la coarda construită. Se duce apoi diametrul acestui cerc care să fie perpendicular pe dreapta (Δ). Coardele cerute se află pe tangentele la cercul interior duse în extremitățile diametrului considerat. 2°. Mijlocul oricărei coarde ce trece prin P, formează cu centrul O al cercului și cu punctul P, un triunghi dreptunghic, deci locul geometric al mijloacelor coardelor este porțiunea interioară cercului O din cercul cu diametrul OP. 3°. Cerc concentric cu cel dat și cu raza $R\sqrt{2}$. ● **117.** ● **118.** ● **119.** 1°. $OM = R(3-2\sqrt{2})$, $ON = R(3+2\sqrt{2})$. 2°. $R\sqrt{11} \leqslant l \leqslant R\sqrt{23}$. ● **120.** Avem $MA^2 + AN^2 = 4R_1^2$, $AB \cdot AD = R_2^2 - R_1^2 = (R_2+R_1)(R_2-R_1)$, $AB = ND$. Atunci $S_1 = MA^2 + AB^2 + AD^2 = 4R_1^2 - AN^2 + AB^2 + AD^2 = 4R_1^2 - (AD-AB)^2 + AB^2 + AD^2 = 2(R_1^2+R_2^2)$ și $S_2 = 2S_1 + 2AB \cdot AD = 2(R_1^2+3R_2^2)$. ● **121.** 1°. În triunghiul MBC unghiul $\hat{M} = 180° - (\hat{B}+\hat{C})$ și cum $\hat{B} = \widehat{BAD}$ și $\hat{C} = \widehat{CAE}$ rezultă că $\hat{M} = 180° - (\widehat{BAD} + \widehat{CAE}) = \widehat{DAE}$. Cum unghiul $\widehat{DAE}$ este constant rezultă că și $\hat{M}$ este constant. 2°. Unghiurile $\widehat{AFB}$ și $\widehat{BAD}$ sînt egale ca avînd aceeași măsură, iar $\widehat{AGP} = \widehat{CAG} + \widehat{GCA} = \widehat{CAE}$. Cum $\hat{P} = 180° - (\widehat{AFB} + \widehat{AGP})$ rezultă că $\hat{P} = 180° - (\widehat{BAD} + \widehat{CAE}) = \widehat{DAE}$. ● **122.** $S_1 = OP^2$. $S_2 = 8R^2 - 4OP^2$; $S_3 = 4R^2$. ● **123.** 1°. $OH = \frac{R^2}{x}$; $HB = \frac{R}{x}(x-R)$. 2°. $EA = BD = R\sqrt{\frac{2(x-R)}{x}}$; $AC = R + x$; $CD = \sqrt{x^2 - R^2}$. 3°. $MN = \frac{2R^2 + Rx + x^2}{2x}$, $x \in (R, +\infty)$, pentru $x = R$, $y = MN = 2R$ și pentru $x = \infty$, $y = \infty$, $y_{minim} = \frac{2\sqrt{2}+1}{2}R$, pentru $x = R\sqrt{2}$. ● **124.** Notînd cu H proiecția punctului P pe AB și $AH = x$, trebuie să avem $2(m+2)x = 4am + a$. Cum $x \in [0;2a]$, avem o singură soluție dacă $m \geqslant -\frac{1}{4}$.

● **125.** 1°. Se notează cu F și H proiecțiile lui A și B pe CD (Fig. 1.125). Proiectăm pe A' și B' pe AB, în F' și H'. Rezultă că $A'F'=DF$; $B'H'=HC$; $AF'=BH'=h$. Segmentul MN este linie mijlocie în trapezul $H'B'A'F'$. 2°. $A'B'^2=F'H'^2+(H'B'-F'A')^2=(a+2h)^2+h^2(\mu-\lambda)^2$. aria $ABB'A'=$ aria $H'B'A'F'-$ aria $BB'H'-$ aria $AA'F'=\frac{a+2h}{2}h(\lambda+\mu)-$ $-\frac{h^2\lambda}{2}-\frac{h^2\mu}{2}=\frac{h(\lambda+\mu)(a+h)}{2}$. ● **126.** 1°. Din triunghiul dreptunghic CBE (Fig. 1.126) avem $BC=2x$ așa că $P=AB+2BC+CD=4x+$ $+(AB+CD)$, dar aria trapezului ne arată că $a^2=\frac{x}{2}(AB+CD)$ și deci

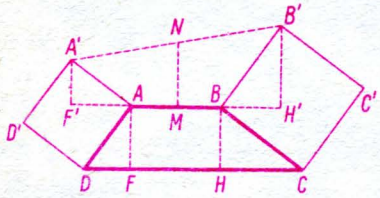


Fig. 1.125

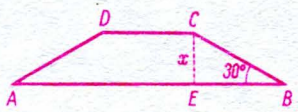


Fig. 1.126

$$P=4x+\frac{2a^2}{x}=2\frac{a^2+2x^2}{x}.$$

2°. Perimetrul devine minim cînd $P'(x)=\frac{2x^2-a^2}{x^2}=0$, adică $x=\frac{a}{\sqrt{2}}=$ $=a\frac{\sqrt{2}}{2}$ deci înălțimea este jumătate din diagonala pătratului de latură a, laturile neparalele sînt cît diagonala pătratului de latură a, baza mare și baza mică se obțin din sistemul: $AB+CD=\frac{2a^2}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}=2a\sqrt{2}$ și $AB-CD=2EB=2BC\cos 30°=a\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$, care ne arată că baza mare este cît diagonala pătratului de latură a mărită cu jumătatea diagonalei pătratului de latură $a\sqrt{3}$; baza mică este cît diagonala pătratului de latură a micșorată cu jumătate din diagonala pătratului de latură

$a\sqrt{3}$. ● **127.** 1°. $EF=2x$; $AB=2u$; $CD=2v$ (Fig. 1.127). $OC\perp OB$ ca bisectoare ale unghiurilor interne de aceeași parte a secantei, deci suplimentare. OH este înălțime în triunghiul dreptunghic BOC, deci $x^2=OH^2=CH\cdot HB=v\cdot u$. 2°. $m^2=2x(u+v)$. Triunghiul BKD arată că $l^2=4x^2+(u+v)^2$ așa că $l^2-4uv=(u+v)^2$ și $m^4=4uv\,(l^2-4uv)$ sau $16\,(uv)^2-4(uv)l+m^4=0$ iar $uv=\dfrac{2l^2\pm\sqrt{4l^2-16m^4}}{16}$; $(u+v)^2=\dfrac{l^2\mp\sqrt{l^2-4m^2}}{2}$. Cantitățile u și v sînt rădăcinile ecuației $t^2-(u+v)t+uv=0$ deci ca problema să fie posibilă trebuie ca $l^4-4m^4>0$ deci $l>m\sqrt{2}$ iar pentru că $l^2>\sqrt{l^4-4m^4}$; $u+v>0$ și $uv>0$ și reali, deci $u+v=\sqrt{\dfrac{l^2\pm\sqrt{l^4-4m^4}}{2}}$ și $uv=\dfrac{l^2\mp\sqrt{l^4-4m^4}}{8}$. Avem $\sin\widehat{BAD}=\dfrac{KD}{AD}=\dfrac{2x}{u+v}=\dfrac{2\sqrt{uv}}{u+v}=$ $=\dfrac{l^2\pm\sqrt{l^4-4m^4}}{2m^2}$; $\widehat{ADC}=180°-\widehat{BAD}$. Cînd $l=m\sqrt{2}$ avem $\sin\widehat{BAD}=1$, $\widehat{BAD}=90°$ iar trapezul devine pătrat. ● **128.** Prin ipoteză $MN=\dfrac{AB+CD}{2}=EF$, unde EF este linia mijlocie a trapezului. Rezultă că în patrulaterul $MENF$ diagonalele sînt egale. Diagonala AC a trapezului împarte trapezul în două triunghiuri, ABC și ACD, în care $ME=FN=\dfrac{AC}{2}$ și cum sînt paralele și egale, patrulaterul $MENF$ este un dreptunghi, avînd diagonalele egale și două laturi paralele și egale (Fig. 1.128). Patrulaterul $G_1G_2G_3G_4$ este tot un dreptunghi, pentru că OM este mediană în triunghiul AOB, OE este mediană în triunghiul BOC, deci G_1G_2 este paralelă și egală cu $\dfrac{2}{3}$ din ME, iar pentru aceleași considerente, $G_3G_4=\dfrac{2}{3}FN$ și paralelă

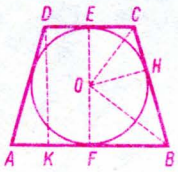


Fig. 1.127

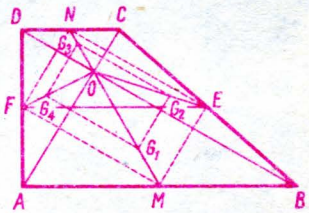


Fig. 1.128

cu FN. Proprietatea se menține înlocuind punctul O cu orice punct din plan. ● **129** Descompunem (Fig. 1.129) patrulaterul în două triunghiuri ale căror centre de greutate sînt în g, pentru ACD, și g' pentru ABC. Avem $Hg=\frac{DH}{3}$, $Hg'=\frac{BH}{3}$. Pentru a găsi centrul de greutate al patrulaterului, luăm momentele față de H, mijlocul lui AC. Avem

$GH\cdot$ aria $ABCD=gH\cdot$ aria $ADC-g'H\cdot$ aria ABC, de unde $GH=\frac{DH-BH}{3}$.

Pentru echilibru trebuie să avem $GH<B'H=BH$, deci $DH<4BH$.

● **130.** 1°. $\widehat{DAC}=\frac{1}{2}\widehat{AQ}=\widehat{QNA}=BNM=90°-\hat{B}=\hat{C}=\widehat{DCA}$. 2°. $AC=5\sqrt{2}$ și $DE=\frac{5\sqrt{3}}{2}$ $(DE\perp AC)$, de unde $S_{ADC}=\frac{25\sqrt{6}}{4}$. 3°. $OH=\frac{1}{2}AN$ deci $AN=2\sqrt{3}$. Din asemănarea triunghiurilor ABC și AQN obținem $AQ=3\sqrt{2}$ și $AH=\frac{3\sqrt{2}}{2}$, de unde $S_{OHAN}=\frac{9\sqrt{6}}{4}$. 4°. $QN=\sqrt{30}$. Din asemănarea triunghiurilor QNA și QMC obținem $QM=\frac{8\sqrt{30}}{5}$ și cum $MT^2=QM\cdot MN$ obținem $MT=\frac{12\sqrt{5}}{5}$ (Fig. 1.130). ● **131.** (Fig. 1.131).

● **132.** Notînd cu F intersecția dreptei CE cu AB (Fig. 1.132), triunghiurile

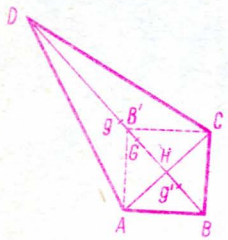


Fig. 1.129

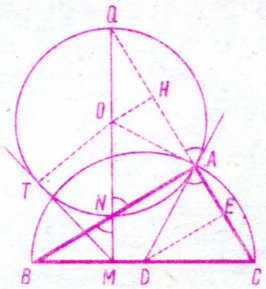


Fig. 1.130

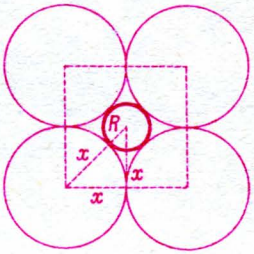


Fig. 1.131

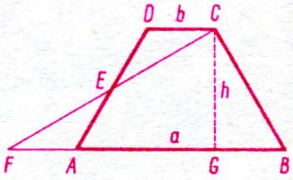


Fig. 1.132

DCE și AEF sînt egale și avem $FA=DC=b$, deci $FB=a+b$. Dacă G este proiecția punctului C pe AB, trapezul fiind isoscel, avem $GB=\frac{a-b}{2}$ și deci $FG=\frac{a+3b}{2}$. Din triunghiul dreptunghic BCF rezultă

$$h=\frac{1}{2}\sqrt{(a-b)(a+3b)},$$

și deci aria căutată este

$$S=\frac{1}{4}(a+b)\sqrt{(a-b)(a+3b)}.$$

● **133.** În trapezul $MNPR$ (Fig. 1.133) fie $z=A_1A_2$ lungimea segmentului din dreapta paralelă cu bazele ce trece prin punctul de intersecție al diagonalelor și care este interior trapezului. Să mai notăm cu h și k înălțimile celor două trapeze A_1A_2PR și MNA_2A_1 de arii S_1 și S_2. Din triunghiurile asemenea MA_1O și MRP și apoi din PA_2O și PNM, avem

$$A_1O=\frac{kb}{h+k},\quad OA_2=\frac{hB}{h+k},\qquad z=\frac{kb+hB}{h+k}.$$

Dar

$$S_1=\frac{z+b}{2}h,\quad S_2=\frac{B+z}{2}k,\qquad \frac{B}{b}=\frac{k}{h},$$

deci avem

$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{(3b+B)B^2}{(b+3B)b^2}$$

(În treacăt se observă că $z=\dfrac{2bB}{B+b}$, deci că z se exprimă numai cu ajutorul bazelor trapezului). ● **134.** Notînd $CM=x$ și cu h înălțimea trapezului, cu h_1, h_2 înălțimile triunghiurilor asemenea ABS și CMS (Fig. 1.134) avem

$$\frac{a}{h_1}=\frac{x}{h_2}=\frac{x}{h-h_1}, \qquad h_1=\frac{ah}{a+x}.$$

Cum aria triunghiului ABS este jumătate din aria trapezului, rezultă

$$x=\frac{a(a-b)}{a+b}.$$

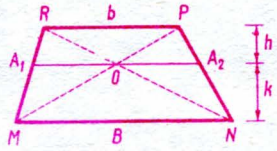


Fig. 1.133

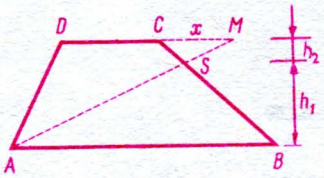


Fig. 1.134

● **135.** În trapezul $ABCD$ (Fig. 1.135) notăm cu M punctul de întîlnire al diagonalelor și cu h_1, h_2 înălțimile triunghiurilor asemenea ABM și CDM. Ducînd BN egală și paralelă cu AC cele două triunghiuri precedente sînt asemenea și cu triunghiul BDN, care va avea aceeași arie S și înălțime h_1+h_2 ca și trapezul dat. Avem

$$\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}}=\frac{h_1}{h_1+h_2}, \quad \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}}=\frac{h_2}{h_1+h_2},$$

de unde $\sqrt{S}=\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}$. ● **136.** În trapezul $ABCD$ (Fig. 1.136) notăm $NM=x$. Ducem BE paralelă și egală cu AD. Raportul înălțimilor celor două trapeze este $(5-x)/(3-x)$. Din ipoteză rezultă

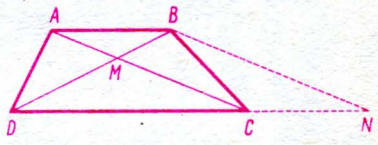


Fig. 1.135

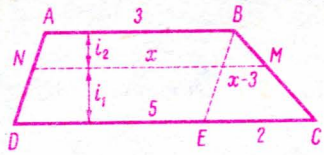


Fig 1.136

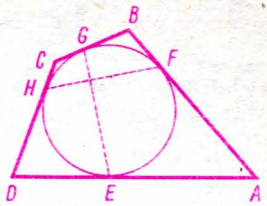


Fig. 1.137

apoi $x=\frac{\sqrt{113}}{3}$. ● **137.** Avem (Fig. 1.137) $\hat{A}+\hat{C}=\frac{1}{2}(\text{arc } \widehat{FGHE}-\text{arc } \widehat{EF})+$ $+\frac{1}{2}(\text{arc } \widehat{HEFG}-\text{arc } \widehat{GH})=\text{arc } \widehat{FG}+\text{ arc } \widehat{HE}=180°$, deci patrulaterul este inscriptibil. ● **138.** În pătratul $ABCD$ (Fig. 1.138) cu latura a, diagonalele au lungimea $a\sqrt{2}$. Pentru aria rombului $AGCI$, trebuie să avem $\frac{AC\cdot GI}{2}=\frac{a^2}{2}$, deci $GI=\frac{a\sqrt{2}}{2}$ și $GO=\frac{a\sqrt{2}}{4}=\frac{BO}{2}$. Rezultă imediat $EG=\frac{a}{2}$ și $OM=\frac{a}{4}$ (OMN este apotema pătratului). În triunghiurile asemenea AFB și EFG, înălțimile sînt în același raport 2, ca și bazele, deci $NF=2FM$. Aria patrulaterului $EFGO$ este $\frac{1}{2}GE(OM+FM)=$

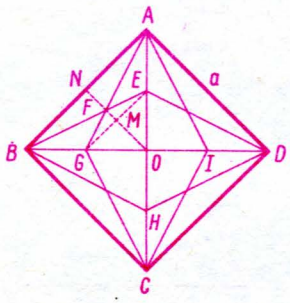


Fig. 1.138

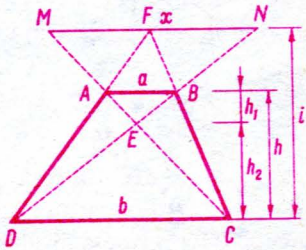


Fig. 1.139

$=\frac{a^2}{12}$. Aria suprafeței comune a celor două romburi este $\frac{a^2}{3}$. ● **139.** Fiind dat trapezul $ABCD$ (Fig. 1.139), să notăm cu E și F punctul de întîlnire al diagonalelor, respectiv al laturilor neparalele. Să mai notăm cu h înălțimea trapezului, cu h_1, h_2 și i înălțimile triunghiurilor ABE, DCE și CDF, precum și $MN=x$. Din triunghiurile asemenea CDE și ABE, $h_1=\frac{ah}{a+b}$, $h_2=\frac{bh}{a+b}$, iar din triunghiurile ABF și CDF, $i=\frac{bh}{b-a}$. În fine, din triunghiurile asemenea CDE și EMN găsim

$$x=\frac{2ab}{b-a}.$$

● **140.** Notînd cu $MN=x$ lungimea segmentului care împarte trapezul în două trapeze de arii egale (Fig. 1.140), de înălțimi CF și NH, avem $\frac{CF}{NH}=\frac{EN}{GB}=\frac{x-b}{a-x}$, unde CE și NG sînt paralele cu AD. Rezultă $x=$

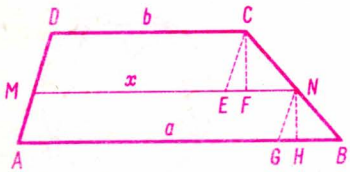


Fig. 1.140

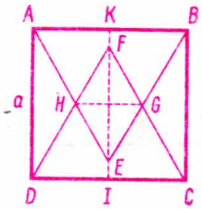


Fig. 1.141

$=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. ● **141.** În pătratul $ABCD$, pe laturile AB și CD se construiesc triunghiurile echilaterale ABE și CDF (Fig. 1.141) care formează rombul $FGEH$ cu unghiuri de 60° și 120°. Cele două triunghiuri FGH și EGH sînt echilaterale. Avem succesiv $KF=a\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $EF=$ $=a(\sqrt{3}-1)$, $HG=a\frac{3-\sqrt{3}}{3}$ și aria rombului $\frac{a^2}{3}(2\sqrt{3}-3)$.

● **142.** 1°. În trapezul $ABCD$ (Fig.1.142) să notăm înălțimea DH cu h. Cum $AH=\frac{a-b}{2}$, aria trapezului este

$$S=\frac{(a+b)\sqrt{4c^2-(a-b)^2}}{4}$$

2°. Avem $\operatorname{tg}\sphericalangle ABD=\frac{\sqrt{4c^2-(a-b)^2}}{4}$. 3°. Cercul căutat este cercul circumscris triunghiului BCD. Notînd cu s aria acestui triunghi și cu R raza căutată, avem

$$s=\frac{BC\cdot CD\cdot DB}{4R}$$

apoi $DB=\sqrt{ab+c^2}$ și $s=\frac{a\sqrt{4c^2-(a-b)^2}}{4}$. Rezultă

$$R=\frac{c\sqrt{ab+c^2}}{\sqrt{4c^2-(a-b)^2}}.$$

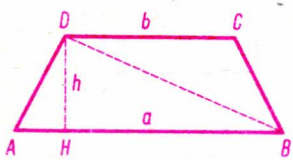


Fig. 1.142

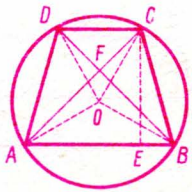


Fig. 1.143

● **143.** 1°. Baza mare a trapezului este latura triunghiului echilateral înscris în cerc deci $R\sqrt{3}$, iar baza mică este latura hexagonului regulat înscris în cerc deci R (Fig. 1.143). Laturile neparalele corespund unor arce de 90°, deci ele sînt egale cu latura pătratului înscris în cerc, deci $R\sqrt{2}$. Înălțimea trapezului este suma apotemelor triunghiului și hexagonului înscris în cerc, deci $\frac{1+\sqrt{3}}{2}R$. Aria trapezului este $\frac{2+\sqrt{3}}{3}R^2$ iar

perimetrul $(1+2\sqrt{2}+\sqrt{3})R$. 2.° Diagonala trapezului se obține fie din triunghiul ACB, unde se constată că unghiul din B este de 75°, fie observînd că unghiul $\widehat{CAB}$ este de 45°, deci triunghiul ACE este isoscel (E este piciorul perpendicularei din C pe AB). Ea este $AC=\frac{\sqrt{3}+1}{2}R$. Diagonalele trapezului sînt perpendiculare, căci suma arcelor $\overset{\frown}{AB}$ și $\overset{\frown}{CD}$ este de 180°, deci distanța de la punctul F de întîlnire a lor, la DC este egală cu $\frac{R}{2}$. Punctul G de întîlnire a laturilor neparalele ale trapezului determină triunghiul ABG, asemenea cu triunghiul CDG. Din acestea rezultă $FG=\frac{2\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}R$. *Observație.* Dacă cele două baze ale trapezului sînt luate de aceeași parte a centrului cercului, laturile lui neparalele sînt egale cu latura poligonului regulat cu 12 laturi înscris în cercul de rază R. Calculele se desfășoară analog, ținînd seama că diagonalele nu mai sînt perpendiculare. ● **144.** 1°. Relația $OA\cdot OA'=OB\cdot OB'$ (Fig. 1.144 *a*, *b*, *c*, *d*) arată că punctul O are aceeași putere față de cercurile PAA' și PBB', deci O se află pe axul lor radical care trece prin cele două puncte de intersecție ale lor P și P'. Cum un asemenea punct este P, există un al doilea punct P' de intersecție pentru care avem $[OP]\cdot[OP']=[OA]\cdot[OA']=-OA^2$. 2°. S-a văzut că P' este inversul lui P prin inversiunea cu polul O și cu modulul $-a^2=-OA^2$. Prin această inversiune, punctelor A și B le corespund punctele A', respectiv B'. Notînd cu S mijlocul lui $A'B$ (Fig. 1.144 *a*, *b*), inversul S' al lui față de O, satisface relația $OS\cdot OS'=-a^2$. Dar $OS=OA\frac{\sqrt{2}}{2}$ și apoi avem $OS'=2OS$. Cum printr-o inversiune o dreaptă care nu trece prin pol, se transformă într-un cerc, rezultă că transformatul segmentului AB este semicercul $A'S'B'$. Cînd punctul P descrie

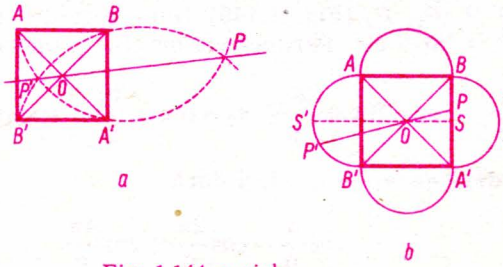


Fig. 1.144 a și b

perimetrul pătratului, P' descrie patru semicercuri de aceeași rază. Cînd punctul P (respectiv P') este interior pătratului, punctul P' (respectiv P) este exterior conturului închis format de cele patru semicercuri. 3°. Paralela prin O la AB' se transformă în ea însăși prin inversiunea față de O. Cele două cercuri PAA' și PBB' sînt simetrice față de Ox, deci ele au aceeași rază y. Luînd un punct P pe Ox, fie P' a doua intersecție a cercurilor PAA' și PBB'. Centrul C al cercului PBB' este la intersecția mediatoarelor segmentelor BB' și PP' (Fig. 1.144 *c*). Avem $y^2=CP^2=MC^2+MP^2$. Dar din triunghiul MCO, avem $MC=OM=\frac{OP-OP'}{2}$, $MP=\frac{PP'}{2}=\frac{OP+OP'}{2}$, deci $CP^2=\frac{OP^2}{2}+\frac{OP'^2}{2}$ și avem $y^2=\frac{1}{2}\left(x^2+\frac{a^4}{x^2}\right)$. Studiul se face numai pentru $x>0$. Pentru $x\to 0$ și $x\to+\infty$, rezultă $y\to+\infty$ și $y\to 0$. Avem un minim $x=a$ (Fig. 1.144*d*)

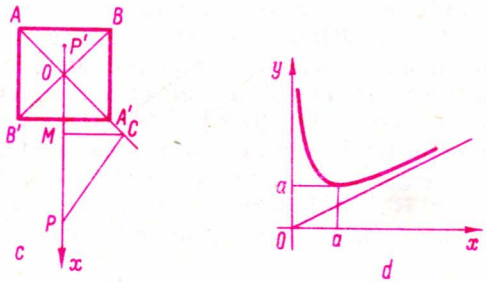


Fig. 1.144 c, d

deci cînd P se găsește pe cercul circumscris pătratului $ABA'B$. ● **145.** Poligoanele P, P_1, P_2 (Fig. 1.145) fiind regulate convexe cu 9 laturi, sînt asemenea între ele. Perimetrele lor sînt proporționale cu apotemele:

$a=R\cos\frac{\pi}{9}$, $a_1=R\cos\frac{2\pi}{9}$, $a_2=R\cos\frac{4\pi}{9}$. Relația $P=P_1+P_2$ este adevărată, dacă $a=a_1+a_2$, deci dacă

$$\cos\frac{\pi}{9}=\cos\frac{2\pi}{9}+\cos\frac{4\pi}{9},$$

ceea ce se dovedește fără greutate. ● **146.** 1°. Se exprimă OL din asemănarea triunghiurilor OPL, OPM și OPL, PLQ și se înmulțesc cele două relații (Fig. 1.146). Se folosește apoi teorema lui Pitagora aplicată la cele patru triunghiuri dreptunghice. 2°. Se notează $OM=a$, $OL=b$ și se calculează cele patru arii în funcție de a și b. Se deduce apoi proprietatea cerută. ● **147.** 1°. Fie (Fig. 1.147) O și E mijloacele celor două baze AB și DC. Avem $EC=CB$, deci locul geometric al punctului C este parabola cu focarul B și directoarea EM, axa ei fiind OB. Locul

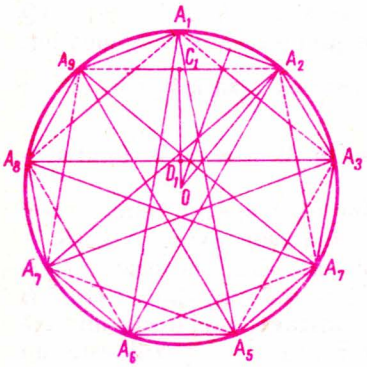


Fig. 1.145

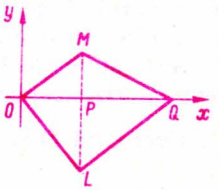


Fig. 1.146

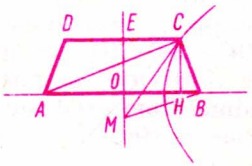


Fig. 1.147

lui D este parabola simetrică față de EM. 2°. Notînd $AB=2a$ și $DC=2x$, în triunghiul dreptunghic ACB, ducem înălțimea CH. Avem $CB^2=AB\cdot BH$, deci $x^2=2a(a-x)$. Numai rădăcina pozitivă $x=a(\sqrt{3}-1)$ este convenabilă pentru problemă. Construcția geometrică a acestei valori se face ușor observînd că într-un triunghi echilateral cu latura a, înălțimea este $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. 3°. Dacă M' este punctul în care CM taie pe OE, vrem să arătăm că M și M' coincid. Aceasta rezultă imediat observînd că triunghiurile dreptunghice ECM și CMB sînt egale ca avînd o catetă și un unghi ascuțit respectiv egale. ● **148.** Aplicînd teorema lui Ptolemeu patrulaterului înscris $ABCE$, avem

$$AC\cdot BE=AB\cdot CE+BC\cdot EA,$$

sau cum $BE=AE=AD$, $BC=AB$, $CE=AC$, avem $AC\cdot AD=AB\cdot AD+AB\cdot AC$, de unde, prin împărțirea cu $AB\cdot AC\cdot AD$, obținem relația dorită. *Observație.* AC și AD sînt laturile heptagoanelor regulate stelate ce se pot înscrie într-un cerc, deci inversa laturii heptagonului regulat convex înscris într-un cerc este egală cu suma inverselor laturilor heptagoanelor regulate stelate înscrise în același cerc. ● **149.** 1°. Triunghiurile ABC și BCD sînt egale ca avînd toate laturile respectiv egale. Deci triunghiul JCB este isoscel. Triunghiurile ACD și ADB sînt de asemenea egale, deci și triunghiul JAD este isoscel. Rezultă că AD și BC sînt paralele, deci $ABCD$ este un trapez isoscel. Dreapta PQ trece prin punctul J de întîlnire a diagonalelor și este perpendiculară pe cele două baze. În triunghiul AJB, avem $AB<AJ+JB=DJ+JB=DB$. 2°. Unim punctele P și Q cu mijlocul M al laturii AB. PM, MQ sînt paralele cu DB respectiv AC și egale cu jumătate din lungimea lor, deci cu $\frac{b}{2}$. Deci cînd D și C descriu cîte un cerc cu raza b și centrele în B și A, P și Q descriu același cerc cu centrul în M și raza $\frac{b}{2}$. Pentru a calcula produsul celor două baze, observăm că trapezul fiind isoscel este inscriptibil, deci în baza teoremei lui Ptolemeu, avem $AD\cdot BC+AB\cdot DC=AC\cdot BD$, de unde $AD\cdot BC=b^2-a^2$. Cum laturile AB și DC sînt constante, perimetrul trapezului este minim cînd $AD+CB$ este minimă. Cum produsul termenilor este constant, suma este minimă cînd termenii sînt egali, deci $AD=CB$, dar atunci trapezul este un dreptunghi și acesta are aria $a\sqrt{b^2-a^2}$. ● **150.** Cum distanța dintre paralele este constantă, din faptul că aria trapezului este constantă, rezultă $AC+BD=\text{const.}$ Dacă D coincide cu B, punctul C se deplasează în C_1, așa ca $AC_1=AC+DB$. Notînd cu F intersecția segmentelor CD și C_1B, acesta este la mijlocul segmentului fix C_1B. Locul geometric al punctului M este cercul cu diametrul EF. ● **151.** Pozițiile extreme ale vîrfului C sînt în punctele M și N de pe dreptele Ox și Oy situate la o distanță de A egală cu semiperimetrul paralelogramului. Locul căutat este segmentul MN, căci dacă punctul C este pe acest segment perimetrul paralelogramului este egal cu $2AM$ și diferit de acesta dacă M este în afara segmentului. ● **152.** 1°. Patrulaterele $MNPQ$ și $RNSQ$ sînt două paralelograme (Fig. 1.152 a) care au o diagonală comună NQ. Prin mijlocul I al ei trec și celelalte două diagonale RS și MP. 2°. Considerînd D ortocentrul triunghiului ABC (Fig. 1.152 b), $NP\parallel BD$ deci $NP\perp AC$ și cum $PQ\parallel AC$ rezultă că patrulaterul $MNPQ$ este un dreptunghi. Așa fiind, segmentele MP, NQ, RS sînt egale și au mijloacele în punctul I, deci punctele M, N, P, Q, R, S se află pe un același cerc cu centrul I, care este cercul lui Euler. ● **153.** Fie

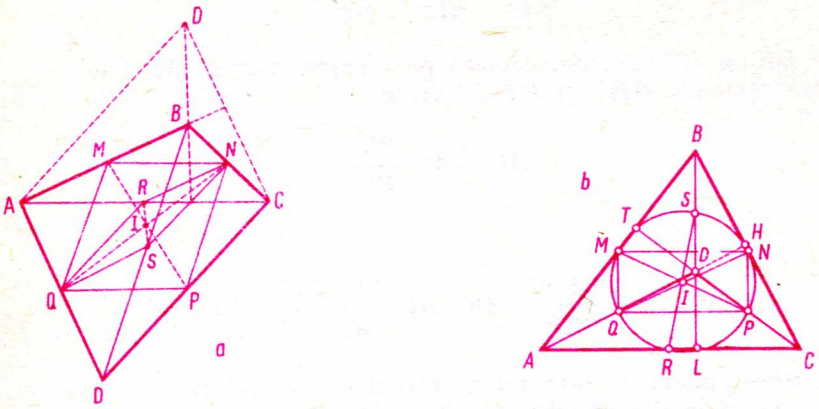


Fig. 1.152

$ABCD$ un trapez care are baza mare CD. Notînd cu H proiecția lui A pe CD, triunghiul BCH este dreptunghic și isoscel. Din cauza simetriei, tangenta comună MN la cele două semicercuri este paralelă cu CD. Rezultă că $MN=3a$. Înălțimea și aria trapezului sînt $\frac{a}{2}+\frac{a\sqrt{2}}{2}$ și $\frac{3a^2(1+\sqrt{2})}{2}$. Dacă CD este baza mică a trapezului, înălțimea și aria trapezului sînt $\frac{a\sqrt{2}}{2}-\frac{a}{2}$ și $\frac{3a^2(\sqrt{2}-1)}{2}$. ● **154.** $\hat{A}=\hat{B}=60°$, $\hat{C}=\hat{D}=120°$. ● **155.** 1°. Dacă $d>R$ locul geometric este un cerc concentric cu cel dat și cu raza $R+d$; dacă $d=R$, locul este format de cercul concentric cu cel dat și cu raza $R+d$ și centrul cercului; dacă $d<R$, locul este format de două cercuri concentrice cu cel dat și de raze $R+d$ și $R-d$. 2°. Punctele se află la intersecția locurilor geometrice găsite mai sus, cu bisectoarele unghiurilor formate de cele două drepte, dacă ele sînt concurente, sau la intersecția cu dreapta paralelă cu cele două drepte date și aflată la mijlocul distanței dintre ele, dacă ele sînt paralele. ● **156.** Se arată că unghiurile din M și P sînt suplimentare. ● **157.** Fie C' punctul unde paralela la MB intersectează pe BC și D' punctul unde paralela la MA intersectează pe AD și fie $M'=C'D\cap CD'$. Aplicînd teorema lui Tales la paralelele AM, CD' tăiate de secantele DA, DC și paralelele DC', MB tăiate de secantele CD, CB, avem

$$\frac{AD}{AD'}=\frac{MD}{MC}=\frac{BC'}{BC}$$

și deci DC' și $D'C$ se intersectează pe dreapta AB. ● **158.** Din triunghiurile asemenea ABC și HBC', avem

$$HC'=AC\,\frac{BC'}{BC}$$

și apoi

$$(HC')^2=AC^2\,\frac{(BC')^2}{BC^2}=DC\cdot BC\,\frac{BC'}{BC}\,\frac{DC'}{DC}=BC'\cdot DC'.$$

● **159.** Presupunem că este trasat cercul cu centrul în O (fig. 1.159) și care este văzut din punctul A sub unghiul 2α și taie dreapta sub unghiul β. Notînd cu I proiecția lui O pe D, din triunghiurile dreptunghice OAT și OIM avem

$$\frac{OA}{OI}=\frac{R}{\sin\alpha}\cdot\frac{1}{R\cos\beta}=\frac{1}{\sin\alpha\cos\beta}=\text{const.}$$

deci locul punctului O este o conică cu directoarea D, focarul A și excentricitatea OA/OI. Cum aceasta din urmă este în general supraunitară, locul este o hiperbolă. Numai în cazul particular cînd $\alpha=\frac{\pi}{2}$ și $\beta=0$ locul este o parabolă. Cercurile trec în acest caz prin A și sînt tangente la dreapta D. ● **160.** 1°. Avem $CD=CE$, deci punctul D este fix pe BC (Fig. 1.160). Cum $BD=BF$ punctele E și F se deplasează pe cercurile fixe, cu centrul în C sau B și de raze CD, respectiv BD.

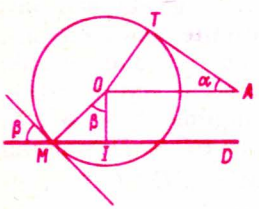


Fig. 1.159

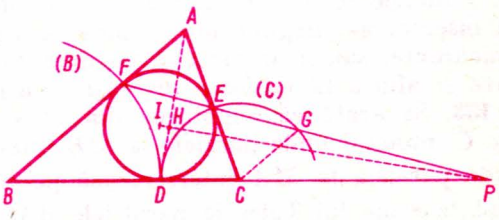


Fig. 1.160

Dacă G este intersecția lui FE cu cercul (C), triunghiurile isoscele ECG și AEF, avînd unghiul din E egal, sînt asemenea, așa că CG este paralelă cu FA și punctele G și F sînt omoloage în cercurile (C) și (B). Rezultă că dreapta FEG trece prin centrul de omotetie directă al cercurilor, prin punctul fix P și care este conjugat armonic cu punctul D, centrul de omotetie inversă, în raport cu centrele B și C ale celor două cercuri (§ 5.4). 2°. Avem $AB-AC=BF-CE=BD-CD=\text{const.}$ Prin urmare dacă D nu este în mijlocul M al lui BC, punctul A descrie o hiperbolă, avînd punctele B și C ca focare și centrul în M, mijlocul lui BC. Axa transversă are lungimea $|BD-DC|$ și D este unul din vîrfurile hiperbolei, celălalt este în simetricul lui D față de M. Cînd $BD=DC$ avem $AB=AC$ și punctul A descrie mediatoarea segmentului BC. Pentru găsirea asimptotelor, în cazul general, cum semiaxa transversă este $a=MD$, iar distanța focală MC, rezultă că semiaxa netransversă este $b=\sqrt{MC^2-MD^2}$, cele două asimptote sînt diagonalele dreptunghiului construit pe segmentele $2a$ și $2b$ ca laturi. ● **161.** Pentru a arăta că punctele M, N, P, Q sînt așezate pe un cerc (Fig. 1.161) e suficient de a arăta că $\sphericalangle MNP=\sphericalangle NQP$. Dar avem $\sphericalangle NMP=180°-\sphericalangle ND_2D_1-\sphericalangle D_2D_1M$ și $\sphericalangle NQP=180°-\sphericalangle B_1B_2P-\sphericalangle QB_1B_2$. Dar unghiurile $\overset{\frown}{ND_2D_1}$ și $\overset{\frown}{B_1B_2P}$ sînt egale căci patrulaterul $A_2B_2D_2C_2$ este inscriptibil. De asemenea patrulaterul $A_1B_1D_1C_1$ fiind inscriptibil avem $\sphericalangle A_1B_1C_1=\sphericalangle A_1D_1C_1$, deci sînt egale și suplimentele lor $\sphericalangle QB_1B_2$ și $\sphericalangle D_2D_1M$, așa că proprietatea este dovedită. În cazul cînd A_2D_2 este paralelă cu A_1D_1, atunci B_2C_2 este paralelă cu B_1C_1. ● **162.** 1°. Dacă notăm cu M punctul de intersecție al diagonalelor patrulaterului (Fig. 1.162), se vede că unghiul $\overset{\frown}{AMB}=\dfrac{\text{măs }\overset{\frown}{AB}}{2}+\dfrac{\text{măs }\overset{\frown}{DC}}{2}=$

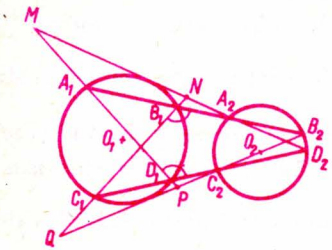


Fig. 1.161

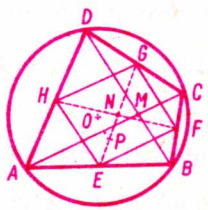


Fig. 1.162

const. deci locul geometric este un arc de cerc, de unde segmentul AB se vede sub un același unghi, constant. 2°. Dacă E, F, G, H sînt mijloacele laturilor AB, BC, CD și DA ale patrulaterului și N este intersecția dreptelor EG și FH, se observă că patrulaterul $EFGH$ este un paralelogram, avînd laturile EF și HG paralele și egale cu $\frac{1}{2}AC$. Dreptele EG și FH sînt diagonalele paralelogramului care se înjumătățesc în punctul N. Punctul G descrie un cerc cu centrul în punctul O, centrul cercului dat, și cu raza constantă și egală cu distanța de la O la una din coardele CD. Punctul N este omoteticul lui G, în raport cu centrul de omotetie E și raportul $\frac{1}{2}$. Deci N descrie cercul care are ca centru mijlocul segmentului EO, notat cu P, deci $PN=\frac{1}{2}EO$. Dacă C coincide cu B, punctul D ocupă poziția D' și G_1 este mijlocul lui BD'; dacă D coincide cu A, punctul C ocupă poziția C' și G_2 este mijlocul lui $C'A$. Cînd G descrie arcul $\overset{\frown}{G_1GG_2}$, punctul N mijlocul lui EG descrie cercul omotetic în raport cu E. ● **163**. 1°. Segmentele BA' și AB' sînt paralele și egale cu PC deci sînt paralele și egale între ele, de unde urmează că BB' și AA' se intersectează în punctul M, care este mijlocul lor. În același fel se arată că CC' și AA' se intersectează în mijlocul lor, deci tot în M, așa că cele trei segmente trec prin același punct (Fig. 1.163). 2°. Segmentele $A\alpha$ și PM sînt mediane în triunghiul APA'; dreapta PM întîlnește mediana $A\alpha$ a triunghiului ABC, în punctul G, centrul de greutate al triunghiului, care este un punct fix, cînd P variază. 3°. Relația $\frac{[GM]}{[GP]}=-\frac{1}{2}$ arată că atunci cînd P descrie o curbă oarecare, punctul M descrie curba omotetică cu prima, față de centrul G, și în raportul $-\frac{1}{2}$. Cînd P descrie o dreaptă fixă (Δ), punctul M descrie dreapta (Δ') omotetica lui (Δ), față de centrul G și în raportul $-\frac{1}{2}$. ● **164**. 1°. Triunghiul dreptunghic $AA'C$ este isoscel, căci $AA'=CA'=2\alpha$, deci unghiurile ascuțite sînt de 45° (Fig. 1.164). Atunci și triunghiurile dreptunghice $AB'H$ și $A'BH$ sînt isoscele și avem $A'H=A'B=\alpha=\frac{AA'}{2}$. 2°. Cum triunghiul $CB'B$ este dreptunghic și isoscel, el este asemenea cu triunghiul $HB'A$, așa că

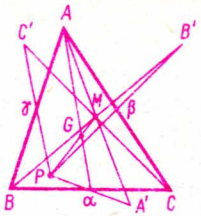


Fig. 1.163

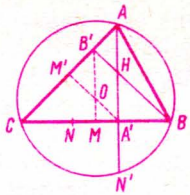


Fig. 1.164

$$\frac{HA}{BC}=\frac{1}{3};\quad \frac{B'A}{B'C}=\frac{1}{3};\quad \frac{B'H}{BB'}=\frac{1}{3},\ \text{deci}\ \frac{B'H}{BH}=\frac{1}{2}.$$

3°. Notînd cu M și M' mijloacele laturilor BC și AC, punctul O se găsește la intersecția mediatoarelor MB' și $M'A'$. Dar triunghiul OMA' este dreptunghic și isoscel deci $MO=MA'=\frac{\alpha}{2}$. 4°. Înălțimea AA' întîlnește cercul circumscris triunghiului ABC, în punctul H', simetricul lui H față de BC, așa că puterea punctului H, față de cercul O este $[HA]\cdot[HH']=-\alpha\cdot 2\alpha=-2\alpha^2$. ● **165**. 1°. Dacă se consideră triunghiul $A_1B_1C_1$ format de bisectoarele exterioare ale triunghiului ABC (Fig. 1.165) acesta are ca ortocentru punctul I și ca cerc al lui Euler, cercul O în care este înscris triunghiul ABC. Se deduce că punctele A', B', C', mijloacele ipotenuzelor IA_1 (în triunghiul IBA_1), IB_1 (în triunghiul ICB_1), IC_1 (în triunghiul IAC_1) sînt pe cercul circumscris triunghiului ABC, cu centrul în O. Punctele A', B', C' sînt centrele cercurilor IBA_1C, ICB_1A, IAC_1B, adică tocmai cercurile cerute în enunț, așa că atunci cînd ABC variază, dar rămîne înscris în cercul O, centrele cerute descriu tocmai cercul O în întregime. 2°. Pentru că O este centrul cercului lui Euler pentru triunghiul $A_1B_1C_1$ și I este ortocentrul acestui triunghi, rezultă că punctul O_1, simetricul lui I în raport cu O, este centrul cercului circumscris triunghiului $A_1B_1C_1$ și acest cerc are raza de două ori mai mare decît raza cercului O (§ 3.1.3.5). ● **166**. Inversa unei drepte $\triangle$ față de un pol P este un cerc al cărui diametru ce trece prin pol este perpendicular pe dreaptă (§ 4.6). Ducînd din pol o dreaptă

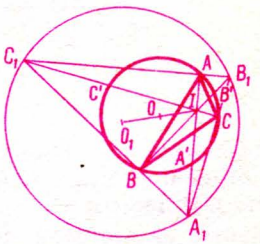


Fig. 1.165

PL, paralelă cu $\triangle$, cercul este în regiunea dintre această dreaptă și $\triangle$, dacă puterea de inversiune este pozitivă, și în afara ei, dacă puterea de inversiune este negativă (Fig. 1.166, a). Cu cît puterea crește în valoare absolută cu atît raza cercului crește (În figura alăturată $PM_1 \times PN < PM_2 \times PN$). Revenind la problema pusă, centrele cercurilor transformate se găsesc pe perpendiculara pe Ox, dusă prin punctul fix P. Din fiecare din cele două familii de cercuri, corespund numai acelea care intersectează dreapta Oy, iar dintre acestea cele care au raza mai mică, așa că trebuie să se caute acele cercuri care sînt tangente la Oy. Ducînd o dreaptă PL paralelă cu Ox, trebuie să se afle centrele cercurilor tangente la PL și Oy, ori acestea se găsesc pe cele două bisectoare ale unghiurilor făcute de aceste drepte. Deci fiind dat punctul P, centrele celor două cercuri (corespunzătoare la puteri de inversiune opuse, minime în valoare absolută) se găsesc intersectînd cele două bisectoare cu perpendiculara la Ox ce trece prin P. În cazul cînd dorim ca cele două puncte A și B să fie numai pe semidreptele Ox, respectiv Oy, dacă punctul P este în interiorul unghiului (mai mic de 180°) corespunde numai cercul transformat cu putere de inversiune negativă, iar dacă punctul P este exterior unghiului, corespunde numai cercul transformat cu putere de inversiune pozitivă (Fig. 1.166, b). ● **167.** Dacă ω este mijlocul lui OH atunci el este centrul cercului lui Euler, cercul celor nouă puncte: mijloacele laturilor, picioarele înălțimilor

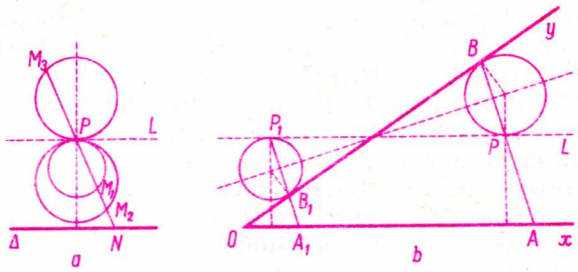


Fig. 1.166

și mijloacele segmentelor dintre ortocentru și vîrf. Cercul ω trece prin A' mijlocul laturii BC și prin K mijlocul segmentului AH. Se știe că $OA' = KH$ pentru că cercul circumscris și cercul celor nouă puncte au ca centre de omotetie directă pe H. În triunghiul ωBC, segmentul $\omega A'$ este mediană și avem $\omega B^2 + \omega C^2 = 2\omega A'^2 + 2BA'^2$. În triunghiul ωAH, segmentul ωK este mediană și deci avem $\omega A^2 + \omega H^2 = 2\omega K^2 + 2KH^2$.

Ținînd seama că $\omega A'=\omega K=\frac{R}{2}$ și $KH=OA'$, adunînd membru cu membru cele două relații, obținem rezultatul dorit (fig. 1.167). ● **168.** Fie cercul cu centrul C (Fig. 1.168) cu raza R, care se vede din punctele A și B sub unghiurile α și β. Avem

$$AC=\frac{R}{\sin\frac{\alpha}{2}},\quad BC=\frac{R}{\sin\frac{\beta}{2}},$$

deci

$$\frac{CA}{CB}=\frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

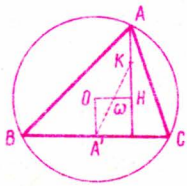


Fig. 1.167

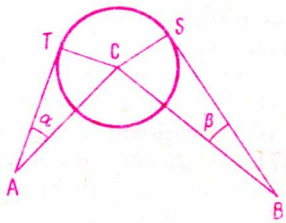


Fig. 1.168

Locul centrului C este deci cel al punctelor a căror distanțe la două puncte fixe este constant. Dacă D și D' sînt punctele de pe dreapta AB care împart segmentul AB în raportul $\sin\frac{\beta}{2}/\sin\frac{\alpha}{2}$ (**se știe**) §3.1.1) că locul căutat este cercul cu diametrul DD'. ● **169.** 1°. Se dă latura $AB=c$ și medianele m_A și m_B (Fig. 1.169, a). Centrul de greutate al triunghiului se găsește la intersecția a două cercuri cu centrele în A și B și razele $\frac{2}{3}m_A$ și $\frac{2}{3}m_B$. Se găsesc apoi mijloacele D și E ale laturilor BC și AC. Două soluții simetrice față de AB. 2°. Se dă latura $AB=c$, mediana m și înălțimea i corespunzătoare acestei laturi. Vîrful C se găsește la intersecția unei paralele la AB situată la distanța i de ea, cu un cerc de rază m și centrul în mijlocul laturei AB (Fig. 1.169, b). Patru soluții. 3°. Se dă latura $AB=c$ și înălțimile h_A și h_B duse din vîrfurile A și B.

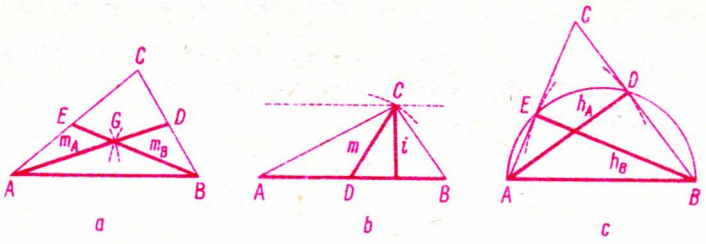


Fig. 1.169

Picioarele celor două înălțimi se găsesc la intersecția cercului cu diametrul AB cu cercurile cu centrele în A și B și razele egale cu cele două înălțimi (Fig. 1.169, c). Două soluții, simetrice față de AB. ● **170.** Fie C centrul unui cerc care trece prin punctul O (fig. 1.170) și se vede din punctul P sub unghiul 2α. Avem $CO=CT=CP\sin\alpha$, deci C aparține locului punctelor al căror raport al distanțelor la două puncte fixe este constant. Ori acesta este un cerc cu centrul într-un punct ω situat pe OP (§ 3.11, 2°), și care o taie în două puncte K, L conjugate armonic cu O și P, în raportul $\sin\alpha$. Se construiesc atunci punctele K și L (§ 4.1. 16_3). Mijlocul segmentului KL este centrul ω al cercului căutat. ● **171.** 1°. *Locul geometric descris de punctul* I. Patrulaterul $OBAC$ este inscriptibil în cercul cu diametrul BC și are centrul în I (Fig. 1.171, a). Acest cerc trece prin două puncte fixe, O și A, așa că centrul cercului se deplasează pe mediatoarea segmentului OA. *Locul geometric descris de punctul* H. Se știe că proiecțiile unui punct A, de pe cercul circumscris triunghiului OBC, pe cele trei laturi ale triunghiului sînt coliniare, așa că punctul H descrie dreapta care unește proiecțiile punctului A pe Ox și Oy, notate cu α și β, adică dreapta $\alpha\beta$. 2°. *Locul geometric descris de punctul* I_1. Pentru că în triunghiul dreptunghic $A_1B_1C_1$ avem $I_1A_1=I_1B_1=I_1C_1$ (Fig. 1.171, b), iar dacă R este raza cercului O_1, putem scrie $R^2=O_1B_1^2=O_1I_1^2+B_1I_1^2=I_1O_1^2+I_1A_1^2$. Prin urmare punctul I_1 are proprietatea că suma distanțelor lui la două puncte fixe O_1 și A_1 este constantă, locul lui geometric este un cerc cu centrul în mijlocul P al segmentului O_1A_1, raza lui fiind $\rho=\frac{1}{2}\sqrt{2R^2-d^2}$, unde d este distanța dintre O_1 și A_1. Ca problema să fie posibilă trebuie ca $d<R\sqrt{2}$. Cînd $d=R$, punctul A_1 este pe cercul dat deci cercul se reduce la un punct, punctul O_1. Cînd A_1 este pe cercu loc geometric al punctelor de unde se pot duce tangente perpendicu-

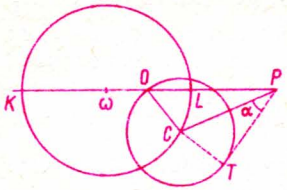


Fig. 1.170

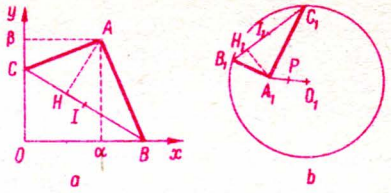


Fig. 1.171

lare la cercul O_1, deci este de rază $R\sqrt{2}$, locul lui I_1 se reduce la un punct, mijlocul lui O_1A_1. *Locul geometric descris de punctul* H_1. Pentru că dreptele A_1H_1 și O_1I_1 sînt perpendiculare pe B_1C_1, punctul P, mijlocul lui O_1A_1 este egal depărtat de H_1 și de I_1 așa că H_1 descrie cercul de la punctul precedent. ● **172.** 1°. Presupunem problema rezolvată și fie O_1 și O_2 centrele celor două cercuri, de aceeași rază R și să notăm cu C punctul de contact dintre cele două cercuri (Fig. 1.172, a). În triunghiul SO_1O_2, segmentul SC este mediană deci avem $SO_1^2+SO_2^2=2SC^2+2R^2$ așa că $SC^2=\dfrac{SA^2+SB^2}{2}$. Punctul C se găsește la distanță constantă de punctul S, prin urmare C descrie un cerc, cu centrul în S și de rază $r=\sqrt{\dfrac{SA^2+SB^2}{2}}$. 2°. Pentru a determina complet punctul C, mijlocul

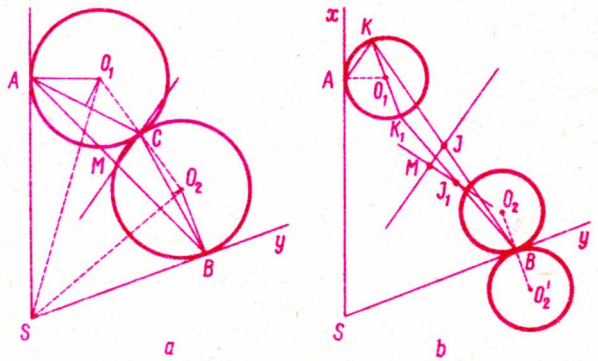


Fig. 1.172

segmentului O_1O_2, să căutăm locul geometric descris de mijlocul segmentului ce unește centrele a două cercuri egale, dar nu neapărat tangente între ele, cînd cercul O_1 este tangent în A la SA și cercul O_2 este tangent în B la SB, dacă facem ca raza cercurilor să varieze (Fig. 1.172, b). 2_1. Să presupunem mai întîi că cele două cercuri sînt în interiorul unghiului $\widehat{xSy}$. Prin O ducem diametrul K_1OK, paralel cu BO_2 și așa încît B și K să fie de o parte și de alta a liniei centrelor O_1O_2. Avem $\sphericalangle AO_1K = \sphericalangle ASB = 2\alpha$, căci au laturile perpendiculare. Rezultă că unghiul ascuțit făcut de SA cu AK este α, deci că dreapta AK este fixă ca fiind paralelă cu bisectoarea unghiului $\widehat{ASB}$ și trecînd prin punctul fix A. Cum mijlocul J al segmentului BK este și mijlocul segmentului O_1O_2, punctul K este omoteticul direct al lui J față de centrul de omotetie B, deci cînd el parcurge dreapta AK, punctul J parcurge o paralelă la AK, deci o paralelă la bisectoarea interioară a unghiului $\widehat{xSy}$. Observăm însă că această paralelă trece și prin mijlocul M al segmentului AB, căci aceasta este poziția particulară a punctului J, pentru cazul cînd raza celor două cercuri este nulă. Rezultă că punctul C trebuie să se afle nu numai pe cercul cu centrul S și raza r, ci și pe paralela la bisectoarea interioară a unghiului $\widehat{xSy}$, care trece prin mijlocul segmentului AB. 2_2. Să presupunem că cercul tangent în A este interior unghiului $\widehat{xSy}$, iar celălalt este exterior aceluiași unghi. Cînd raza cercurilor variază, punctul K_1 descrie paralela la bisectoarea exterioară a unghiului $\widehat{xSy}$, căci $AK_1 \perp AK$. Ducînd dreptele O_1O_2' și $K_1'B$ ele se intersectează la mijlocul lor J_1. Punctul K_1 este omoteticul direct al lui J_1, față de centrul de omotetie B. Cînd K_1 descrie dreapta AK_1, paralelă cu bisectoarea exterioară a unghiului $\widehat{xSy}$, punctul J_1 descrie o paralelă la aceasta. În cazul cînd razele sînt nule, J_1 coincide cu mijlocul M al lui AB, deci locul căutat este paralela la bisectoarea exterioară ce trece prin mijlocul segmentului AB. 3°. *Construcție geometrică.* Pentru a construi punctul C de tangență a celor două cercuri de raze egale, unul fiind tangent în A la Ox, iar celălalt în B la Oy, prin mijlocul M al segmentului AB ducem două paralele la cele două bisectoare ale unghiului $\widehat{xOy}$. Intersecțiile lor cu cercul cu centrul în S și raza r, ne dau cele patru soluții ale problemei, căci găsirea centrului pentru fiecare dintre ele se face intersectînd mediatoarea segmentului AC (sau BC), cu perpendiculara în A la Sx (sau în B la Sy). ● **173.** Avem (Fig. 1.173), $a^2 - c^2 = b^2$ și $a + c = AB + BC = AD + DB + BE + EC = AD + 2BD + FC = r + 2(c - r) + b - r = b + 2c - 2r$. Se găsește

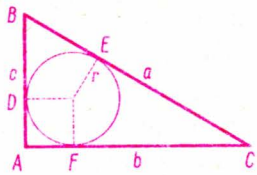


Fig. 1.173

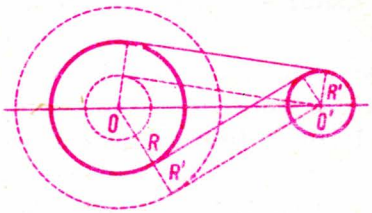


Fig. 1.174

$$a=\frac{b^2-2br+2r^2}{b-2r},\quad c=\frac{2r(b-r)}{b-2r}.$$

● **174.** 1° Cercurile nu se intersectează. Fie cercurile cu centrele în O și O' și razele R, R' $(R'<R)$. Pentru a construi tangenta exterioară, cu centrul în O se trasează cercul de rază $R-R'$, la care se duce tangenta din O' (Fig. 1.174). Tangenta comună este paralelă cu aceasta. Pentru a construi tangenta comună interioară se trasează cercul cu centrul în O și raza $R+R'$, la care se duce tangenta ce trece prin O'. 2°. Dacă cercurile se intersectează, prima problemă se rezolvă la fel, iar a doua nu se pune. ● **175.** 1°. Centrul cercului ce trece prin cele trei puncte este cercul circumscris triunghiului cu vîrfurile în cele trei puncte. 2°. Fie punctele A, B și dreapta D (Fig. 1.175, a). Centrul

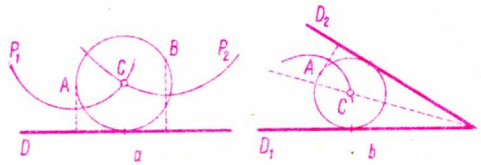


Fig. 1.175

C al cercului ce trece prin cele două puncte și este tangent la dreapta D se găsește la intersecția parabolelor care au focarul în A, respectiv B și directoarea D (Același centru C se găsește la intersecția mediatoarei segmentului AB cu una din cele două parabole precedente). 3°. Fie punctul dat A și dreptele D_1, D_2. Centrul C al cercului care trece prin punctul A și este tangent la cele două drepte, se găsește la intersecția parabolei cu focarul în A și directoarea D_2 cu intersecția acelei bisectoare a unghiului dintre dreptele D_1 și D_2 care se găsește în aceeași regiune determinată de drepte, ca și punctul A.

● **176.** Centrul O al cercului din care face parte arcul căutat AB (Fig. 1.176, a) trebuie să fie la distanța R de punctele A și B. Cum însă în A și B, tangentele la arcul de cerc, trebuie să facă unghiurile α și β cu Δ_1 și Δ_2, distanțele punctului O la cele două drepte, trebuie să fie $d_1 = R\cos\alpha$, $d_2 = R\cos\beta$, deci el se găsește la intersecția dreptelor δ_1, δ_2 paralele cu Δ_1, respectiv Δ_2 la distanțele d_1, d_2 de ele și între cele două drepte. Avem două soluții: arcele $\overset{\frown}{AB}$ și $\overset{\frown}{A'B'}$. Problema este posibilă numai dacă cele două drepte δ_1, δ_2 sînt concurente, sau coincid, în ultimul caz avem o infinitate de soluții. Dacă $\alpha = \beta$, avem $d_1 = d_2 = R$ și O se găsește la intersecția bisectoarei unghiului format de dreptele Δ_1, Δ_2, care sînt tangente la cerc cu una din cele două drepte δ_1 sau δ_2 (Fig. 1.176, b). ● **177.** Centrul O_1 se găsește pe perpendiculara

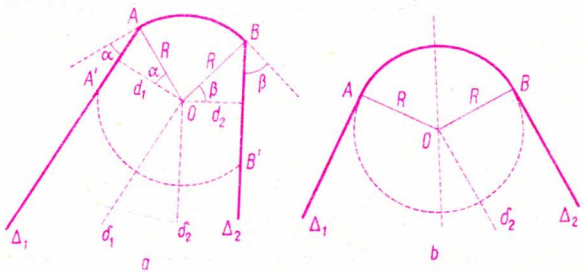


Fig. 1.176

în A la dreapta care face unghiul α cu Δ_1 (și γ cu Δ_2) (Fig. 1.177, a). Centrul O_2 trebuie să se găsească pe o dreaptă δ aflată la distanța $R_2 \cos\beta$ de Δ_2 și între Δ_1, Δ_2. Intersecția acestei drepte cu cercul cu centrul O_1 și raza R_1+R_2, dă două soluții O_2, O_2'. Problema are patru soluții, căci pe lîngă cele două curbe trasate în figură, mai avem și curbele $AMM'B'$, $AM'MB$. Problema este posibilă numai dacă distanța de la O_1 la dreapta δ este mai mică sau egală cu R_1+R_2, deci dacă $R_1+R_2 \geqslant d-R_1\cos\gamma-R_2\cos\beta$, unde d este distanța de la A la dreapta Δ_2. În cazul cînd $\alpha=\beta=0$, dreptele Δ_1 și Δ_2 sînt tangente la cîte unul din arcele de cerc. În cazul cînd arcele de cerc sînt tangente interior, dreapta δ se intersectează cu un cerc cu centrul în O_1 și raza R_2-R_1 (Fig. 1.177, b). Avem și aici patru soluții. Condiția de posibilitate a problemei este $R_2-R_1 \geqslant d-$

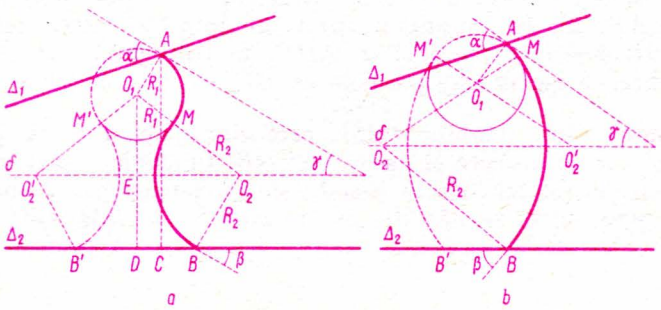


Fig 1.177

$-R_1\cos\gamma-R_2\cos\beta$. ● **178.** Dacă $\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$ (Fig. 1.178, a), avem $MA=2R\cos x$ și $MT=-R\operatorname{tg}2x$, și relația din enunț conduce la ecuația $\cos x(2k\sin^2 x-\sin x-k)=0$ (Se exclude $2\sin^2 x-1=0$). Dacă $\cos x=0$, avem $x=\frac{\pi}{2}$ și punctele M, A și T coincid, deci avem o soluție banală a problemei. Celălalt factor dă soluția pozitivă $\sin x=\frac{1+\sqrt{1+8k^2}}{4k}$ care trebuie să fie cuprinsă între $\frac{\sqrt{2}}{2}$ și 1. Avem soluție

a problemei numai dacă $k>1$. Dacă $0<x<\frac{\pi}{4}$ (Fig. 1.178, *b*), avem $MA=2R\cos x$ și $MT=R\operatorname{tg}2x$, deci $2k\sin^2 x+\sin x-k=0$. Rădăcina pozitivă corespunde totdeauna (orice $k>0$). ● **179.** 1°. Fie F punctul în care se întîlnesc dreptele BC și AD. Unghiul $\widehat{ACF}$ este dreptunghic ca și $\widehat{ACB}$, deci F se găsește pe cercul ce trece prin A, O, C și are centrul în D. Cum unghiul $\widehat{AOF}$ este dreptunghic și O este mijlocul lui AB, rezultă că în triunghiul FAB, FO este înălțime și mediană, deci triunghiul este isoscel. Același triunghi mai are înălțimea AC și ele se întîlnesc în ortocentrul H. Să arătăm că H se găsește pe cercul OBC. În adevăr, patrulaterul $OBCH$ este inscriptibil (unghiurile din O și C sînt drepte), diametrul lui fiind BH, deci cercul ce trece prin OBC trece și prin H. Rezultă că dreapta BE trece prin H, deci ea este a treia înălțime a triunghiului FAB. Cum unghiul $\widehat{AMB}$ este drept, locul geometric al punctului M este cercul cu diametrul AB. Mai observăm că, FAB fiind isoscel, triunghiurile ABC și ABM sînt egale, deci MC este paralelă cu AB. 2°. În triunghiul BHA, dreapta OE unește mijloacele a două laturi, deci este paralelă cu AHC. În triunghiul ABF, dreapta OD pentru același motiv este paralelă cu BF. Rezultă că OE și OD sînt perpendiculare. Cum unghiul $\widehat{DME}$ este drept, rezultă că punctele M și O se găsesc pe un cerc cu diametrul DE. Punctele O și C, de intersecție a cercurilor cu centrele în E și D, sînt simetrice față de linia centrelor, deci punctul C se găsește pe același cerc $OEDM$ (Fig. 1.179).

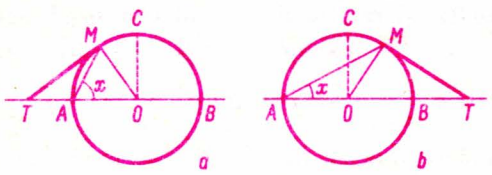


Fig. 1.178

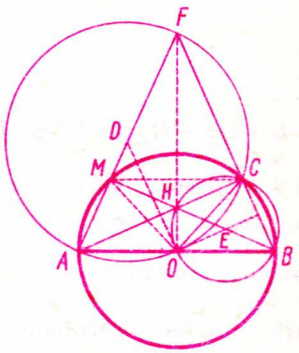


Fig. 1.179

Capitolul II
GEOMETRIE ÎN SPAȚIU

● **1.** 1° Proiectăm figura pe planul P, paralel cu D. Fie a, b, m proiecțiile lui A, B, M și δ cea a lui Δ. Segmentul AB paralel la P este paralel și egal cu proiecția sa ab; mijlocul său M se proiectează în m pe ab. Fig. 2.1. b reprezintă proiecția obținută în P. Ea ne arată că mulțimea punctelor m este paralela δ' la δ, echidistantă față de a și de δ. Mulțimea dreptelor mM este deci planul Q paralel la D și care trece prin δ'. 2°. Fie Δ_1 paralela la Δ dusă prin a și fie R planul $D\Delta_1$. Proiectăm figura pe planul R paralel cu $a\alpha$: A este un punct dublu, B se proiectează în b_1, M în m_1 mijlocul lui Ab_1. Figura 2.1. c reprezintă proiecția obținută în R. Ea ne arată că mulțimea punctelor m_1 este o dreaptă au (asemănare). Mulțimea dreptelor m_1M este deci planul αau sau S. Planul Q, paralel la D și Δ este intersectat de dreapta αa și deci și de planul S. Deci: mulțimea punctelor M este dreapta de intersecție a planelor Q și S (Fig. 2.1 a, b, c). ● **2.** 1° Să considerăm planele $AB\gamma B'A'$, $BC\alpha C'B'$, $CA\beta A'C'$ (Fig. 2.2). Primul și al treilea se taie după AA'. Se pot întîmpla două cazuri. Dacă planul $BC\alpha C'B'$ taie dreapta AA' într-un punct D, acesta aparținînd celor trei plane, aparține dreptelor BB' și CC' după care planul $BC\alpha C'B'$ taie celelalte două plane. Rezultă că cele trei drepte AA', BB', CC' sînt concurente. Dacă însă planul $BC\alpha C'B'$ este paralel cu dreapta AA', planele $AB\gamma B'A'$ și

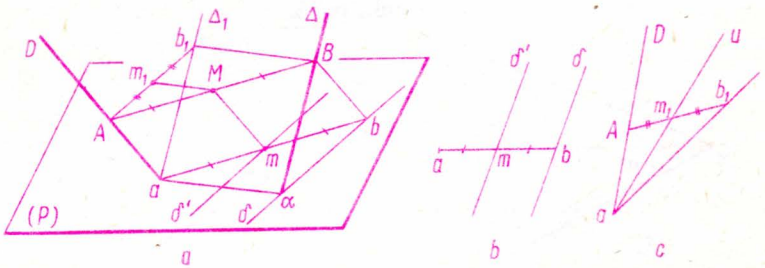


Fig. 2.1

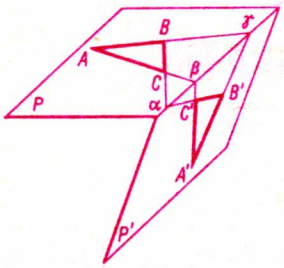


Fig. 2.2

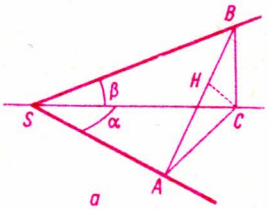
$AC\beta C'A'$, care trec prin AA', taie planul $BC\alpha C'B'$ după două drepte paralele cu AA' (care sînt chiar BB', CC'). Rezultă că dreptele AA', BB', CC' sînt paralele. 2°. Cele trei puncte α, β, γ aparţin atît planului triunghiului ABC, cît şi planului triunghiului $A'B'C'$, deci se află pe dreapta de intersecţie a celor două plane.

● **3.** Dacă unghiurile α şi β nu sînt drepte, le putem presupune, la început, amîndouă ascuţite. Pe muchia diedrului format de cele două plane luăm segmentul $SC=l$ şi dacă prin C ducem un plan perpendicular pe SC, acesta taie dreapta SA în punctul A şi dreapta SB în punctul B. Din triunghiurile dreptunghice SAC şi SBC avem (Fig. 2.3a)

$$SA=\frac{SC}{\cos \widehat{ASC}}=\frac{l}{\cos\alpha}\ ;\quad SB=\frac{l}{\cos\beta}$$

şi $CA=SC\ \mathrm{tg}\ \widehat{ASC}=l\mathrm{tg}\,\alpha$; $CB=l\ \mathrm{tg}\ \beta$ iar din triunghiul ABC (dreptunghic) $AB^2=CA^2+CB^2=l^2(\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{tg}^2\,\beta)$. Din triunghiul ABS se obţine $AB^2=l^2(\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{tg}^2\,\beta)=SA^2+SB^2-2\ SA.\ SB\ \cos\widehat{ASB}=l^2\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}+\right.$ $\left.+\frac{1}{\cos^2\beta}-2\frac{\cos\widehat{ASB}}{\cos\alpha\ \cos\beta}\right)$ aşa că

$$\cos\widehat{ASB}=\frac{\cos^2\alpha+\cos^2\beta-(\cos^2\beta-\cos^2\alpha\cos^2\beta+\cos^2\alpha-\cos^2\alpha\cos^2\beta)}{2\cos\alpha\cos\beta}=$$
$$=\cos\alpha\cos\beta.$$



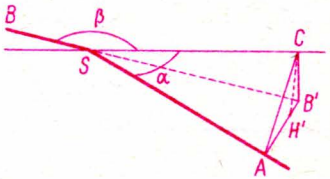


Fig. 2.3 a, b

În triunghiul ABC, folosind aria putem scrie

$$CH \cdot AB = CB \cdot CA \quad \text{deci} \quad CH = \frac{l \sin\alpha \sin\beta}{\sqrt{\sin^2\alpha \cos^2\beta + \sin^2\beta \cos^2\alpha}}$$

și

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \widehat{CSH} = \frac{CH}{SC} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{cotg}^2 \alpha + \operatorname{cotg}^2 \beta}}. \quad (CH \perp AB).$$

Cînd unghiurile α și β sînt drepte, planul ASB este perpendicular pe dreapta SC și $\widehat{ASB} = \frac{\pi}{2}$ iar $\operatorname{tg} \varphi \to \infty$. Cînd unul din unghiuri este drept, de exemplu α, planul ASB este perpendicular pe planul ASC, $\widehat{ASB} = \frac{\pi}{2}$ și $\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \beta$. Cînd α și β sînt amîndouă obtuze putem pune $\alpha' = \pi - \alpha$; $\beta' = \pi - \beta$ iar $\cos \widehat{ASB} = \cos \alpha' \cos \beta' = (-\cos \alpha)(-\cos\beta) = \cos \alpha \cos \beta$ și $\operatorname{tg} \varphi$ are aceași expresie. Cînd numai unul din unghiuri este obtuz (Fig. 2.3 b), de exemplu β, prelungind pe SB, avem pe SB' și notăm $\beta' = \pi - \beta$, $\cos \widehat{ASB'} = \cos \alpha \cos \beta' = \cos \alpha \cos (\pi - \beta) = -\cos \alpha \cos \beta$ deci $\cos \widehat{ASB} = \cos (\pi - \widehat{ASB'}) = \cos \alpha \cos \beta$. Pentru $\operatorname{tg} \varphi$ obținem la fel, expresia dedusă la început. ● **4.** 1°. Se notează cu (D) paralela dusă prin A_1 la (D_2); avem $\sphericalangle D_1A_1D = 30°$ și planul D_1A_1D este perpendicular pe A_1A_2 (Fig. 2.4). Planul perpendicular pe D_1A_1D, care trece prin M_1M_2 este perpendicular pe (D_2) deci și pe paralela ei (D), pe care o întîlnește în M. Triunghiurile A_1M_1M și M_1MM_2 sînt dreptunghice de unde $M_2M = A_1A_2 = d$ și $A_2M_2 = A_1M$. Se deduce $M_1M = \frac{x}{2}$ și $M_1M_2 = \frac{\sqrt{x^2 + 4d^2}}{2}$ iar $A_2M_2 = \frac{x\sqrt{3}}{2}$. 2°. Vrem să avem $3d = A_1M_1 + A_1A_2 + A_2M_2 + M_2M_1 = x + d + \frac{x\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{x^2 + 4d^2}}{2}$ de unde $\sqrt{x^2 + 4d^2} = 4d - x(2 + \sqrt{3})$ așa că avem condiția de posibilitate $x < \frac{4d}{2 + \sqrt{3}}$,

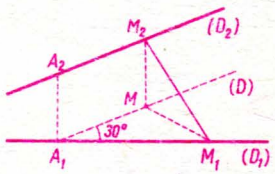


Fig. 2.4

de care ținînd seamă concludem că numai cea mai mică dintre rădăcini este acceptabilă

$$x=\frac{d}{3}\left[2\sqrt{3}-\sqrt{6\,(11-6\sqrt{3}\,)}\right].$$

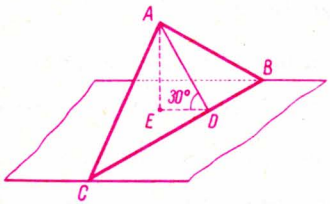


Fig. 2.5

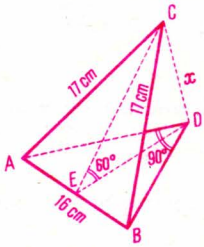


Fig. 2.6

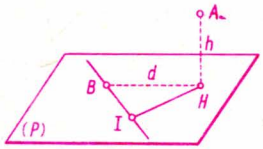


Fig. 2.7

Evident că M_1 poate fi luat de oricare parte a lui A_1 ● **5.** $AE=3{,}36$ cm (Fig. 2.5). ● **6.** $x=13$ cm (Fig. 2.6). ● **7.** Dreapta $HI\perp IB$, după teorema celor trei perpendiculare (Fig. 2.7), așa că I descrie cercul (C) de diametru HB, segmentul HB se vede din I sub un unghi drept. Cînd BI se rotește în jurul lui B, punctul I descrie cercul întreg. Volumul conului (Q), cu vîrful în A și de bază (C) este $V=\frac{1}{3}\,\frac{\pi d^2}{4}\,h$. 2°. Să notăm cu J proiecția ortogonală a lui A pe un plan ce trece prin B. În planul AJB, segmentul AB se vede sub un unghi drept din J; deci locul geometric descris de J este sfera de diametru AB. Volumul solidului (T) interior lui (S) și exterior conului (Q) este

$$V_1=\frac{\pi AB^3}{6}-\frac{\pi hd^2}{12}=\frac{\pi\,(h^2+d^2)\sqrt{h^2+d^2}}{6}-\frac{\pi hd^2}{12}.$$

3°. Sfera cu centrul în B și care trece prin A, trece și prin cercul (C') care are centrul în H și trece prin A. Volumul (W) este dat de

$$V_2=\frac{4\pi}{3}\,AB^3-\frac{\pi HA^2HB}{3}=\frac{4\pi}{3}\,(h^2+d^2)\sqrt{h^2+d^2}-\frac{\pi}{3}\,h^2d.$$

Volumul sferei cu centrul în B care trece prin H este

$$\frac{4\pi}{3} BH^3 = \frac{4\pi}{3} d^3,$$

deci

$$8 V_1 = V_2 + \frac{4}{3}\pi d^3,$$

sau

$$\frac{4\pi}{3}(h^2+d^2)\sqrt{h^2+d^2} - \frac{2\pi d^2 h}{3} = \frac{4\pi}{3}(h^2+d^2)\sqrt{h^2+d^2} - \frac{\pi}{3} h^2 d + \frac{4}{3}\pi d^3$$

de unde

$$h^2 - 2hd - 4d^2 = 0$$

așa că împărțind cu d^2 și notînd $\frac{h}{d} = x$, avem $x^2 - 2x - 4 = 0$ deci $x = 1 \pm \pm\sqrt{5}$, dar convine doar rădăcina pozitivă. ● **8.** Dăm segmentului AB o translație cît EK și ajunge în A_1B_1; segmentului CD îi dăm o translație cît KE și ajunge în C_1D_1; s-a obținut paralelipipedul dreptunghiular $AC_1BD_1A_1CB_1D$ (Fig. 2.8). 1°. F și I sînt centrele a două fețe opuse ale paralelipipedului așa că dreapta FI este perpendiculara comună lui AC și BD; G și H fiind centrele a două fețe opuse ale paralelipipedului, dreapta GH este perpendiculara comună la AD și BC. 2°. Triedrul este tridreptunghic, pentru că paralelipipedul a fost dreptunghiular drept. 3°. În dreptunghiul AD_1BC_1 avem

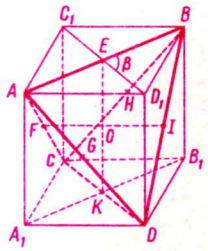


Fig. 2.8

$$BD_1 = 2b \sin\frac{\beta}{2} = GH = 2g;\ AD_1 = 2b\cos\frac{\beta}{2} = FI = 2f.$$

$AC = 2c$ este diagonala unui dreptunghi de laturi $2b \sin\frac{\beta}{2}$ și $2e$; unghiul ascuțit γ este unghiul ascuțit dintre diagonalele acestui dreptunghi. $2d = AD$ este diagonala unui dreptunghi de laturi $2b\cos\frac{\beta}{2}$ și $2e$ și

unghiul ascuțit δ este unghiul ascuțit dintre diagonalele acestui dreptunghi. Avem relațiile:

$$c^2=e^2+b^2\sin^2\frac{\beta}{2};\ \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=\frac{e}{b\sin\frac{\beta}{2}};$$

$$d^2=e^2+b^2\cos^2\frac{\beta}{2};\ \operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}=\frac{e}{b\cos\frac{\beta}{2}}$$

care determină cantitățile c, d, γ, δ. 4°. Din volumul paralelipipedului scoatem de 4 ori volumul piramidei AA_1DC și obținem volumul tetraedrului $ABCD$. Volumul AA_1DC este $\frac{1}{6}$ din volumul paralelipipedului. Deci volumul $ABCD$ este $\frac{1}{3}$ din volumul paralelipipedului

$$V=\frac{8b^2e\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{3}=\frac{4b^2e\sin\beta}{3}.$$

● **9.** 1°. $MO=\sqrt{a^2+x^2}$, $NO=\sqrt{a^2+y^2}$, $MN=\sqrt{4a^2+(y-x)^2}$ (Fig. 2.9). Pentru ca triunghiul să fie dreptunghic în O trebuie să avem

$$MO^2+NO^2=MN^2$$

sau

$$a^2+x^2+a^2+y^2=4a^2+x^2+y^2-2xy;$$

$$2xy=2a^2 \qquad \text{sau} \qquad xy=a^2.$$

În acest caz

$$MN=\sqrt{4a^2+x^2+y^2-2xy}$$

$$MN=\sqrt{4a^2+(x+y)^2-4xy}$$

$$MN=\sqrt{4a^2+(x+y)^2-4a^2}=x+y$$

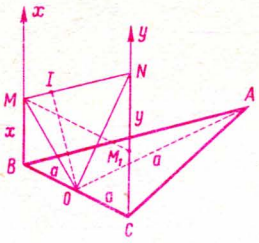


Fig. 2.9

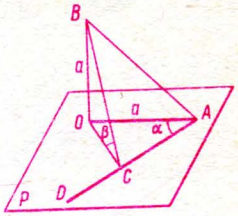


Fig. 2.10

2°. $MI=\dfrac{MO^2}{MN}=\dfrac{a^2+x^2}{x+y}=\dfrac{xy+x^2}{x+y}=x$, $NI=y$, $OI=\sqrt{xy}=a$.

● **10.** 1) $\sin\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta=1$.

2) $\alpha=51°49'38'',3$.

3) $S=\dfrac{a^2}{2}\cos\alpha\sqrt{1+\sin^2\alpha}$ sau

$$S=\frac{a^2\sqrt{\sin^2\beta-\cos^2\beta}}{2\sin^2\beta}$$

$$\sin\beta=+\frac{\sqrt{1-\sqrt{1-k^2}}}{k^2}$$ (Fig. 2.10)

● **11.** 1° $AC=\sqrt{4a^2-b^2}$, $b_{max}=a\sqrt{2}$; $S=\dfrac{b\sqrt{4a^2-b^2}}{2}$

2° $x=\dfrac{2a^2-b^2}{\sqrt{4a^2-b^2}}$; $y=b\sqrt{\dfrac{3a^2-b^2}{4a^2-b^2}}$

4° $V=\dfrac{b^2\sqrt{3a^2-b^2}}{2}$. (Fig. 2.11)

● **12.** 1°. Volumul tetraedrului este dat de $V=\dfrac{AA'}{3}$ aria $ABB'=$ $=\dfrac{l\operatorname{tg}\beta}{3}\cdot\dfrac{l^2\operatorname{tg}\alpha}{2}=\dfrac{l^3}{6}\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$ (Fig. 2.12). Pentru lungimea muchiei $A'B'$

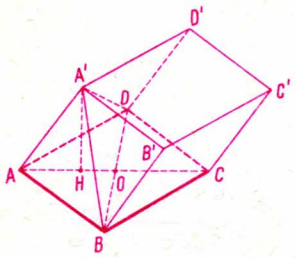


Fig. 2.11

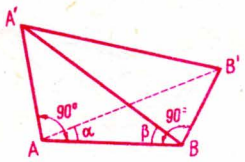


Fig. 2.12

determinăm la început pe $AB'=\sqrt{l^2+l^2\operatorname{tg}^2\alpha}$ așa că

$$l'=A'B'=\sqrt{AA'^2+AB'^2}=l\sqrt{\operatorname{tg}^2\beta+\operatorname{tg}^2\alpha+1}.$$

2°. Din expresia volumului tetraedrului avem $\frac{l^3}{6}\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=\frac{l^3K}{6}$, deducem $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=K$ și din cunoașterea sumei unghiurilor avem $\operatorname{tg}s=\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-K}$ așa că formăm ecuația de gradul al doilea care ne dă pe $\operatorname{tg}\alpha$ și $\operatorname{tg}\beta$

$$z^2-\operatorname{tg}s\cdot(1-K)z+K=0.$$

Ca rădăcinile acestei ecuații să fie reale trebuie ca discriminantul să fie pozitiv sau nul deci $\operatorname{tg}^2 s\cdot(1-K)^2-4K\geqslant 0$. Putem scrie

$$\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta=(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)^2-2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}^2 s\,(1-K)^2-2K$$

cu care obținem pe l'. Trebuie să avem unghiurile α și β ascuțite, deci tangentele lor pozitive. Produsul lor este pozitiv ($K>0$), iar pentru sumă trebuie ca $(1-K)\operatorname{tg}s>0$. Cînd $\operatorname{tg}s>0$, $0<K<1$; pentru $\operatorname{tg}s<0$, avem $K>0$. Notînd cu K_1, K_2 ($K_1<1<K_2$) rădăcinile discriminantului, atunci dacă $0<s<\frac{\pi}{2}$ avem $K<K_1$ iar pentru $\frac{\pi}{2}<s<\pi$; $K>K_2$.

3°. Cînd $s=\frac{\pi}{3}$; $\operatorname{tg}s=\sqrt{3}$ și avem $K=\operatorname{tg}\alpha\frac{\sqrt{3}-\operatorname{tg}\alpha}{1+\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha}=z\frac{\sqrt{3}-z}{1+z\sqrt{3}}$;

$K'=\dfrac{(\sqrt{3}-2z)(1+z\sqrt{3})-\sqrt{3}z(\sqrt{3}-z)}{(1+z\sqrt{3})^2}=\dfrac{\sqrt{3}z^2+2z-\sqrt{3}}{(1+z\sqrt{3})^2}$. Derivata se anulează pentru $\dfrac{-1\mp 2}{\sqrt{3}}$ și este pozitivă între rădăcini. Avem maxim cînd $z=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ valoarea lui fiind $K=\dfrac{1}{3}$. ● **13.** În triunghiurile OPQ, OQR și OPR (Fig. 2.13), aplicăm teorema lui Pitagora generalizată, ținînd seama că fețele triedrului sînt de 60° și $\cos 60°=\dfrac{1}{2}$.

$$PQ^2=OP^2+OQ^2-2OP\cdot OQ\cos\widehat{POQ}=a^2+x^2-ax$$

$$QR^2=x^2+y^2-xy,\quad PR^2=a^2+y^2-ay.$$

Ca triunghiul PQR să fie dreptunghic în P trebuie ca $PQ^2+PR^2=QR^2$ deci $a^2+x^2-ax+a^2+y^2-ay=x^2+y^2-xy$ așa că

(1) $$xy-a(x+y)=-2a^2.$$

Dacă raza cercului circumscris triunghiului OQR este b, aplicînd teorema sinusului deducem că $\dfrac{QR}{\sin 60°}=2b$ deci

(2) $$QR=b\sqrt{3}=\sqrt{x^2+y^2-xy}.$$

Ecuațiile (1) și (2) ne permit determinarea lui $x+y$ și xy deci aflarea lui x și y. Cum x și y trebuie să fie pozitive căci sînt laturile unui triunghi, cînd $a<\dfrac{b\sqrt{3}}{2}$ sînt îndeplinite aceste condiții. ● **14.** 1°. Punc-

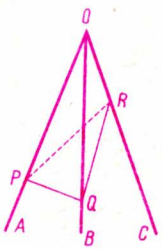


Fig. 2.13

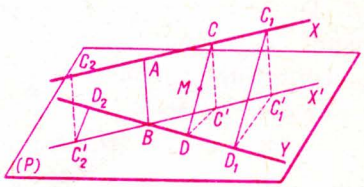


Fig. 2.14

tul C și dreapta BY determină un plan, în care din punctul C exterior dreptei BY, se poate duce o perpendiculară pe dreaptă și numai una. Proiecția C pe planul (P) este un punct C' de pe dreapta BX' și cum $CC' \perp (P)$, ea este perpendiculară pe dreapta BY din planul (P). Rezultă că dreapta BY este perpendiculară pe dreptele CD și CC', deci pe planul $C'CD$, în care se află dreapta $C'D$ din acest plan. Prin urmare triunghiul BDC' este dreptunghic și isoscel, pentru că $\widehat{DBC'} = \frac{\pi}{4}$ (Fig. 2.14). 2°. Dacă unghiul ascuțit al dreptelor AB și CD este egal cu $\frac{\pi}{4}$, atunci și unghiul $\widehat{DCC'}$ făcut de CD cu paralela CC' la AB, este tot egal cu $\frac{\pi}{4}$. Triunghiul dreptunghic $CC'D$ este isoscel și $C'D = CC' = AB = a$. Cum $BC'^2 = BD^2 + DC'^2 = 2a^2$ și dacă notăm $AC = BC' = x$, rezultă $x = a\sqrt{2}$. Punctul C trebuie luat pe AX la o distanță de A egală cu $a\sqrt{2}$. Deci se obțin două puncte C_1 și C_2. Perpendicularele C_1D_1 și C_2D_2 sînt cuprinse în planele C_1BY și C_2BY și sînt perpendiculare pe BY. Unghiul plan al diedrului C_1BYC_2 este egal cu unghiul dreptelor C_1D_1 și C_2D_2, pentru că sînt amîndouă perpendiculare pe muchia BY. Dacă notăm cu C_1' și C_2' proiecțiile punctelor C_1 și C_2 pe planul (P), unghiul $\widehat{C_1D_1C_1'}$ din triunghiul dreptunghic isoscel $C_1D_1C_1'$, este egal cu $\frac{\pi}{4}$ și reprezintă unghiul plan corespunzător diedrului format de planul (P) și planul C_1BY. Judecînd absolut la fel, unghiul plan corespunzător diedrului format de planul (P) și de planul C_2BY este și el egal cu $\frac{\pi}{4}$. Dreptele AC și BY nu sînt așezate în același plan; planele C_1BY și C_2BY făcînd unghiuri egale cu planul (P), ele sînt simetrice în raport cu planul (P) și formează un diedru drept. Dreptele C_1D_1 și C_2D_2 perpendiculare pe muchia diedrului sînt perpendiculare. 3° Triunghiurile BAC și BDC, nu sînt așezate în același plan și fiind dreptunghice în A și D rezultă că centrul sferei care trece prin punctele A, B, C, D este la mijlocul lui BC, în M. Cînd C descrie dreapta AX, punctul M descrie, în planul BAC, o dreaptă paralelă și echidistantă de AX și BX'. 4°. În triunghiul dreptunghic BAC avem

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + x^2}.$$

În triunghiul dreptunghic isoscel BDC' avem

$$2BD^2=BC'^2=AC^2=x^2$$

deci $BD=\frac{x\sqrt{2}}{2}$. Triunghiurile dreptunghice ABD și $CC'D$ au unghiul drept cuprins între laturi egale, întrucît $AB=CC'$ și $BD=C'D$, deci sînt egale, așa că $AD=CD=\sqrt{a^2+\frac{x^2}{2}}$. Volumul tetraedrului $ABCD$ se obține, ținînd seama că distanța de la vîrful C la fața ABD este egală cu $C'D$, deci

$$V=\frac{1}{3}\cdot C'D\cdot \text{aria } ABD=\frac{1}{6}AB\cdot BD^2=\frac{1}{12}ax^2.$$

Aria triunghiului isoscel ACD este dată de $\frac{x}{2}\sqrt{AD^2-\frac{x^2}{4}}=\frac{x}{4}\sqrt{4a^2-x^2}$, deci distanța l de la vîrful B pînă la planul ACD este dată, de

$$l=\frac{ax^2}{12}:\frac{1}{12}x\sqrt{4a^2+x^2}=\frac{ax}{\sqrt{4a^2+x^2}}.$$

Cum x satisface ecuația $l^2(4a^2+x^2)=a^2x^2$ rezultă că $x=\frac{2al}{\sqrt{a^2-l^2}}$ deci $l<a$. ● **15.** 1° Din triunghiurile dreptunghice SAB și SAC (Fig. 2.15), avem

$$SB=\frac{SA}{\cos x},\quad SC=\frac{SA}{\cos y},\quad AB=SA\operatorname{tg} x,$$

$$AC=SA\operatorname{tg} y.$$

Din triunghiurile SBC și ABC, avem

$$BC^2=\frac{SA^2}{\cos^2 x}+\frac{SA^2}{\cos^2 y}-\frac{2SA^2}{\cos x\cos y}\cos\alpha,$$

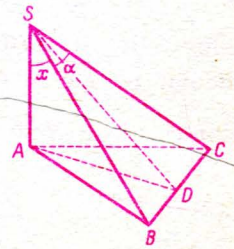


Fig. 2.15

$$BC^2=SA^2\cdot\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+SA^2\cdot\frac{\sin^2 y}{\cos^2 y}-2\cdot SA^2\cdot\frac{\sin x\sin y}{\cos x\cos y}\cos\widehat{BAC}.$$

Egalînd cele două expresii avem $\cos x \cos y = \cos\alpha - \sin x \sin y \cos \widehat{BAC}$. Pentru a avea relaţia din enunţ trebuie să avem $\sin x \sin y \cos \widehat{BAC} = 0$, de unde $\cos \widehat{BAC} = 0$, deci $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{2}$. 2°. Ţinînd seama de $\sin x = \lambda \cos y$, condiţia din paragraful precedent devine $\cos^2\alpha = \cos^2 x \cos^2 y = (1-\sin^2 x)(1-\sin^2 y) = (1-\lambda^2 \sin^2 y)(1-\sin^2 y) = \lambda^2 \sin^4 y - (1+\lambda^2)\sin^2 y + 1$. Ecuaţia $f(\sin y) = \lambda^2 \sin^4 y - (1+\lambda^2)\sin^2 y + 1 - \cos^2\alpha = 0$ are, pentru $\sin^2 y$, rădăcini reale şi pozitive, căci discriminantul $(1-\lambda^2)^2 + 4\lambda^2\cos^2\alpha$, suma rădăcinilor $\frac{1+\lambda^2}{\lambda^2}$ şi produsul lor $\frac{1-\cos^2\alpha}{\lambda^2}$ sînt pozitive. Cum $f(1) = -\cos^2\alpha < 0$, unitatea se află între rădăcini, deci pentru $\sin^2 y$ nu convine decît rădăcina cea mai mică

$$\sin^2 y = \frac{1+\lambda^2 - \sqrt{(1-\lambda^2)^2 + 4\lambda^2\cos^2\alpha}}{2\lambda^2}.$$

Cum y este un unghi ascuţit, extrăgînd rădăcina trebuie să păstrăm numai valoarea pozitivă. Prin urmare avem întotdeauna un triedru $SABC$ şi unul singur (afară de simetricul lui faţă de ABC). Aplicaţie: $y = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{4}$. 3° Avem aria $ABC = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{SA^2}{2} \cdot \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y$ şi aria $SBC = \frac{SB \cdot SC}{2} \sin\alpha = \frac{SA^2 \sin\alpha}{2\cos\alpha\cos y}$. Notînd cu SD şi AD intersecţiile planelor SBC şi ABC cu un plan care trece prin SA şi este perpendicular pe BC şi observînd că aria ABC este proiecţia ariei SBC pe planul ABC, avem aria ABC = aria $SBC \cdot \cos \widehat{SDA}$ = aria $SBC \cdot \sin\varphi$. Rezultă

$$\frac{SA^2}{2} \cdot \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \frac{SA^2 \sin\alpha \sin\varphi}{2\cos x \cos y}$$

şi simplificînd găsim $\sin x \sin y = \sin\alpha \sin\varphi$. ● **16.** 1°. Triunghiurile SAM, AMB şi SAB sînt evident dreptunghice. MB este perpendiculară pe AM şi pe perpendiculara în M la planul cercului, deci este perpendiculară pe orice dreaptă din planul determinat de cele două

drepte, deci și pe SM (Fig. 2.16). Rezultă că triunghiul SMB este dreptunghic în M. Centrul sferei trebuind să fie egal depărtat de punctele A, M și B, trebuie să fie pe perpendiculara în O pe planul cercului. Cum centrul sferei trebuie să fie egal depărtat de A și S, el trebuie să se afle în planul perpendicular pe AS în mijlocul D al acestui segment, deci în C la mijlocul lui SB. Raza sferei este $R\sqrt{2}$. 2°. Cum MB este perpendiculară pe planul SAM, rezultă că planele SAM și SMB sînt perpendiculare. Atunci perpendiculara din A pe planul SMB, se află în planul ASM și este $h=AH$, punctul H fiind pe SM. Din triunghiul AMB avem $AM=2R\cos x$. Scriind apoi în două feluri aria triunghiului SAM, avem $h=\dfrac{2R\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$. Pentru ca $h=d$, trebuie $x<\dfrac{\pi}{2}$ și apoi $d<R\sqrt{2}$. ● **17.** Fie laturile triunghiului ABC, $a>b>c$, care este secțiunea normală făcută în prismă prin vîrful A al triunghiului echilateral $AB'C'$ de latură x. Avem $b=AC'\cos\widehat{CAC'}>c=AB'\cos\widehat{BAB'}$ așa încît $\cos\widehat{CAC'}>\cos\widehat{BAB'}$. (Fig. 2.17). Dacă prin C' ducem o paralelă la CB, care întîlnește muchia BB' în D, avem $a=BC=C'D=$ $=B'C'\cos\widehat{DC'B'}>c\cos\widehat{BAB'}$ căci $a>c$ așa că $\widehat{DC'B'}<\widehat{BAB'}$ deci $BB'=$ $=AB'\sin\widehat{BAB'}>B'C'\sin\widehat{DCB'}=B'D$. Rezultă că B' și C' sînt de aceeași parte a lui ABC. Triunghiurile dreptunghice ABB', ACC' $B'DC'$ ne dau relațiile

$$BB'^2=AB'^2-AB^2=x^2-c^2;\ CC'^2=AC'^2-AC^2=x^2-b^2;$$

$$B'C'^2-C'D^2=x^2-a^2=B'D^2=(BB'-CC')^2=x^2-c^2+x^2-b^2-$$

$$-2\sqrt{(x^2-b^2)(x^2-c^2)};\quad x^2+a^2-b^2-c^2=2\sqrt{(x^2-b^2)(x^2-c^2)}.$$

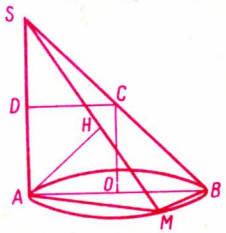


Fig. 2.16

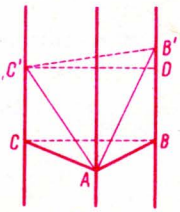


Fig. 2.17

Ca soluția să fie reală, trebuie ca

$$x^2>b^2 \text{ și } x^2+a^2-b^2-c^2>0.$$

Cînd ridicăm la pătrat relația dintre x și laturile a, b, c avem

$$x^4+2x^2(a^2-b^2-c^2)+(a^2-b^2-c^2)^2=4[x^4-x^2(b^2+c^2)+b^2c^2]$$

sau

$$f(x^2)=3x^4-2x^2(a^2+b^2+c^2)-(a^4+b^4+c^4)+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)=0$$

și

$$x^2=\frac{1}{3}\left[a^2+b^2+c^2\pm\sqrt{(a^2+b^2+c^2)^2+3(a^4+b^4+c^4)-6(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}\right]=$$

$$=\frac{1}{3}\left[a^2+b^2+c^2\pm\sqrt{4(a^4+b^4+c^4)-4(c^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}\right]$$

și avem totdeauna o soluție unică dată de

$$x=\sqrt{\frac{1}{3}\left[\Sigma a^2+2\sqrt{\Sigma a^4-\Sigma a^2b^2}\right]}.$$

pentru că $f(b^2)=-a^4-c^4+2a^2c^2=-(a-c)^2<0$ iar b este cuprinsă între cele două rădăcini reale; cantitatea $-a^2+b^2+c^2<\frac{2(a^2+b^2+c^2)}{3}$ căci $-3a^2+3b^2+3c^2<a^2+b^2+c^2$; $b^2+c^2<2a^2$.

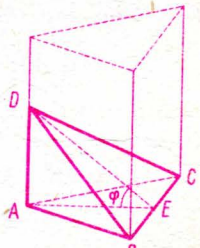


Fig. 2.18

● **18.** $\cos\varphi=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\varphi}=\frac{a^6}{a^6+64v^2}$, $S=\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{a^6+64v^2}{a^4}$,

unde v este volumul piramidei $DABC$ (Fig. 2.18).

● **19.** 1°. Raza cercului de bază a conurilor este $MN=AM\operatorname{tg}\widehat{BAN}=\frac{a\sqrt{6}}{2}$ iar volumul total $V=\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{2}$ unde M este mijlocul lui AB.

2°. Dacă notăm cu r raza sferei, se deduce $R=\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}=\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{2}}=$

$=\frac{a\sqrt{3}}{2}=AM$ care este tocmai raza sferei circumscrise cubului. ● **20.** 1°. Triunghiurile DEF și DAB sînt asemenea, deci $EF=x$. La fel se vede că GH este paralel cu AB, și deci și cu EF și egal cu EF. Triunghiul AEG este echilateral și deci asemenea cu ACD. EG este paralel cu CD deci perpendicular pe AB. La fel FH este paralel cu CD și perpendicular pe AB. Paralelogramul $EFHG$ avînd laturile două cîte două paralele și perpendiculare pe AB este dreptunghi. 2°. Aria triunghiului echilateral AEG este

$$\frac{(a-x)^2\sqrt{3}}{4}$$

așa că aria trapezului $CDEG$ este

$$\frac{\sqrt{3}(2ax-x^2)}{4}.$$

Aria laterală căutată este formată din două arii egale cu aria trapezului $CDEG$ și din aria dreptunghiului $EFHG=EF\cdot EG=x(a-x)$ deci

$$A_l=\frac{\sqrt{3}}{2}(2ax-x^2)+x(a-x)=ax(\sqrt{3}+1)-x^2\frac{\sqrt{3}+2}{2}$$

$A_t=A_l+2A_b=ax(\sqrt{3}+1)-x^2\frac{\sqrt{3}+2}{2}+2\frac{x^2\sqrt{3}}{4}$ căci bazele am văzut că sînt triunghiuri echilaterale de latură x. 3°. Vrem să avem $Ka^2=$ $=A_l=ax(\sqrt{3}+1)-x^2\frac{\sqrt{3}+2}{2}$ deci

$$x=\frac{a}{\sqrt{3}+2}\left[\sqrt{3}+1\pm\sqrt{4+2\sqrt{3}-2k(\sqrt{3}+2)}\right]$$

așa că pentru a avea soluții reale $K<1$. Avem maxim cînd $K=1$ și $x_1=x_2=(\sqrt{3}-1)a$. Pentru $x=0$, $K=0$ și pentru $x=a$ avem $K=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

● **21.** 1°. Perpendiculara comună DE a muchiilor SA și SB se găsește în

planul ce trece prin AS și este perpendicular pe BC (Fig. 2.21 a). Fie SD intersecția acestui plan cu fața SBC. Rezultă că SD este perpendiculară pe BC, deci este înălțime în triunghiul isoscel SBC, deci D este mijlocul lui BC. 2°. Triunghiul ABC este echilateral și H este centrul lui de greutate. Avem $BC=2DC=$

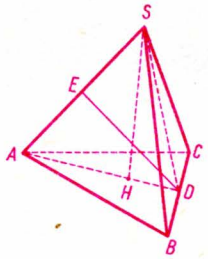


Fig. 2.21 a

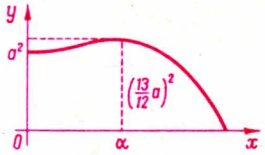


Fig. 2.21 b

$=2a\sin\frac{x}{2}$ și apoi $HD=\frac{a}{\sqrt{3}}\cdot\sin\frac{x}{2}$, $SD=a\cos\frac{x}{2}$, $SH^2=a^2\left(\cos^2\frac{x}{2}-\right.$ $\left.-\frac{1}{3}\sin^2\frac{x}{2}\right)$. Pentru a calcula pe DE, scriem în două feluri aria triunghiului SAD și avem $DE=\sqrt{3}\,SH\,\sin\frac{x}{2}$, deci $y=SH^2+DE^2=$ $=\frac{a^2}{3}\left(1+3\sin^2\frac{x}{2}\right)\left(3\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)=\frac{a^2}{6}(5-3\cos x)\cdot(1+2\cos x)$. Variabila x ia valori între 0 și $\frac{2\pi}{3}$. Avem tabelul de variație și graficul funcției (Fig. 2.21 b).

x	0		α		$\frac{2\pi}{3}$
y'	0	+	0	−	
y	a^2	↗	$\left(\frac{13}{12}a\right)^2$	↘	0

● **22.** 1) $BC=a\sqrt{3}$, $AP=\sqrt{x^2+a^2}$, $AQ=\sqrt{y^2+a^2}$,

$$PQ=\sqrt{(x-y)^2+3a^2}, \quad V=a^2(x+y)\cdot\frac{\sqrt{3}}{12}.$$

2) $x, y=a\left(3m\pm\sqrt{\frac{18m^2-1}{2}}\right), \ m>\frac{\sqrt{2}}{6}.$

3) $V_{min}=\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$

$x=y=\frac{a\sqrt{2}}{2}$, $BCQP$ = dreptunghi (Fig. 2.22).

● **23.** Presupunem $x<y$ (Fig. 2.23). Ducem $BP\parallel MN$, $P\in CN\Rightarrow PC=$ $=y-x$. Dacă $AQ\perp BC\Rightarrow CQ=QB=a\sin 60°=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ de unde $BC=a\sqrt{3}$. Din $\Delta\ PCB$ avem $PB^2=BC^2+PC^2=3a^2+(y-x)^2$ deci $MN=$ $=\sqrt{3a^2+x^2+y^2-2xy}$. Din triunghiurile dreptunghice NCA și MBA avem

$$AN^2=a^2+y^2 \text{ și } AM^2=a^2+x^2.$$

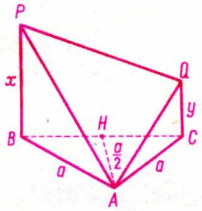


Fig. 2.22

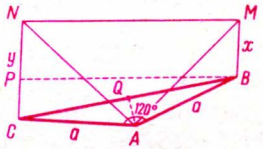


Fig. 2.23

Dacă $\Delta\ NAM$ este dreptunghic în A avem

$$a^2+y^2+a^2+x^2=3a^2+x^2+y^2-2xy$$

de unde

$$2xy=a^2.$$

● **24.** Notăm cu x și y înălțimile celor două piramide (fig. 2.24) avem relațiile $x+y=h$ și $\frac{x}{y}=\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{B'}}$ din care deducem

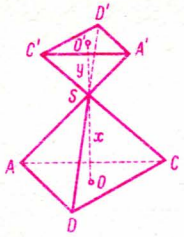


Fig. 2.24

$$x=\frac{h\sqrt{B}}{\sqrt{B}+\sqrt{B'}} \text{ și } y=\frac{h\sqrt{B'}}{\sqrt{B}+\sqrt{B'}}.$$

Cum $V=\frac{1}{3}(Bx+B'y)$ rezultă

$$V=\frac{h}{3}(B+B'-\sqrt{BB'}).$$

● **25.** 1° Raza sferei este jumătate din diagonala paralelipipedului, deci $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ și aria sferei este $S=4\pi(a^2+b^2+c^2)$ 2°. Cele șase cercuri sînt cercurile circumscrise fețelor. Suma lor este

$$2[\pi(a^2+b^2)+\pi(b^2+c^2)+\pi(c^2+a^2)]=4\pi(a^2+b^2+c^2)=S.$$

3°. Înălțimile calotelor sînt respectiv $R-a$, $R-b$, $R-c$, deci ariile lor sînt

$$2\pi R(R-a)=2\pi(a^2+b^2+c^2-a\sqrt{a^2+b^2+c^2}),$$

$$2\pi R(R-b),\ 2\pi R(R-c),$$

fiecare trebuind să fie luată de două ori. Suprafața totală este

$$4\pi[3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,].$$

● **26.** 1° Se aplică teorema medianei triunghiului PMP', care ne dă $MP^2+MP'^2=2SP^2+2SM^2$ (Fig. 2.26) și apoi teorema lui Pitagora generalizată triunghiurilor MSP și MSP' iar din cele două relații obținute va rezulta relația cerută. 2° Se aplică teorema cosinusului în triunghiul PMP' și se obține $\cos \widehat{PMP'}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ de unde $\widehat{PMP'}=\frac{5\pi}{6}$.

● **27.** 1° $A_{lat}=a(h+\sqrt{a^2+h^2})$ (Fig. 2.27).

2° $AF=AE=a\sin\alpha$; $HE=HF=\frac{a\sin^2\alpha}{\sqrt{1+\cos^2\alpha}}$; $EF=a\sqrt{2}\sin^2\alpha$.

$$AH=\frac{a\sqrt{2}\sin\alpha}{\sqrt{1+\cos^2\alpha}}$$

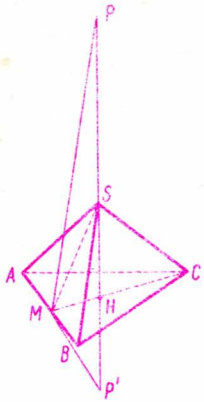


Fig. 2.26

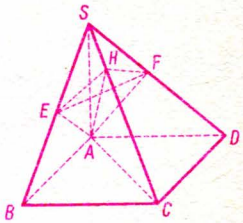


Fig. 2.27

● **28.** 1° $AM=\frac{2b}{3}$, $CN=\frac{2a}{3}$ (Fig. 2.28).

2° $\frac{V_1}{V_2}=\frac{1}{3}$.

3° $5a^2=6b^2$.

4° $V=\frac{5\pi a^2 h}{54}$.

$V=\frac{\pi}{4}\ m^3$.

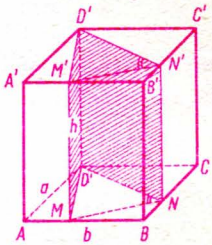


Fig. 2.28

● **29.** 1°. $V_1=\frac{A_{ABC}\cdot AA_0}{3}$; $V_2=\frac{A_{A_1B_1C_1}\cdot A_0A_1}{3}$; $V=A_{ABC}\cdot AA_1$

$A_{ABC}=A_{A_1B_1C_1}$

a) $3(V_1+V_2)=3\left(\frac{A_{ABC}\cdot AA_0}{3}+\frac{A_{A_1B_1C_1}\cdot A_0A_1}{3}\right)=$

$=A_{ABC}\cdot AA_0+A_{A_1B_1C_1}\cdot A_0A_1=A_{ABC}(AA_0+A_0A_1)=A_{ABC}\cdot AA_1=V$;

b) $3n(m+n)V_2=3n(m+n)\cdot\dfrac{A_{ABC}\cdot A_1A_0}{3}$;

$$m\cdot AA_0=n\cdot A_0A_1;\ \frac{AA_0}{A_0A_1}=\frac{n}{m};\ \frac{AA_0+A_0A_1}{A_0A_1}=\frac{n+m}{m};$$

$$A_0A_1=\frac{m}{n+m}\cdot AA_1;$$

$$\frac{AA_0+A_0A_1}{AA_0}=\frac{n+m}{n},\ AA_0=\frac{n}{n+m}\cdot AA_1;$$

$$3n(m+n)\cdot V_2=3n(m+n)\cdot\frac{A_{ABC}}{3}\cdot AA_0=$$

$$=n(m+n)A_{ABC}\cdot\frac{m}{n+m}\ AA_1=mn\cdot V$$

$3m(m+n)V_1=mnV$ (Fig. 2.29).

● **30.** Deoarece prisma $ABCA'B'C'$ și piramida $S'A_0B_0C_0$ (Fig. 2.30) care au aceeași înălțime trebuie să fie echivalente,

$$\text{aria } A_0B_0C_0=3 \text{ aria } ABC,$$

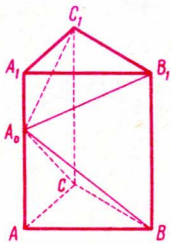


Fig. 2.29

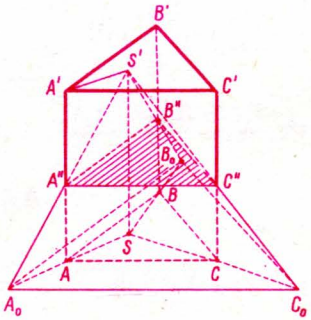


Fig. 2.30

de unde deducem raportul de asemănare al $\Delta ABC \sim \Delta A_0B_0C_0$

$$\frac{SA_0}{SA}=\sqrt{3}.$$

Din asemănările $\Delta S'A'A'' \sim \Delta A_0SS'$ avem

$$\frac{A'A''}{A'A}=\frac{A'A''}{S'S}=\frac{A'S'}{SA_0}=\frac{SA}{SA_0}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Egalitatea $\frac{A'A''}{A'A}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ determină complet poziția punctului A'' pe $A'A$ deci poziția planului secant $A''B''C''$.

● **31.** 1° $xy=2a^2$.

2° $V=\frac{2a^3}{3}$.

3° $S_{min}=10\,a^4$; $x=y=a\sqrt{2}$ (Fig. 2.31).

● **32.** 1°. Planul dus prin IJ intersectează fețele opuse ale prismei după drepte paralele, deci $A_1B_1 \| D_1C_1$ și $A_1D_1 \| B_1C_1$ așa că paralelele cuprinse între paralele sînt egale. (fig. 2.32). 2°. Triunghiurile dreptunghice IAA_1 și JBB_1 sînt asemenea, avînd laturile paralele. Deci $\frac{AA_1}{a}=\frac{BB_1}{b}=\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\widehat{AIA_1}=\operatorname{tg}\widehat{BJB_1}$ căci $\widehat{AIA_1}=\widehat{BJB_1}$. 3°. Din asemănarea triunghiurilor dreptunghice IDD_1 cu IAA_1 sau JCC_1 cu JBB_1, avem

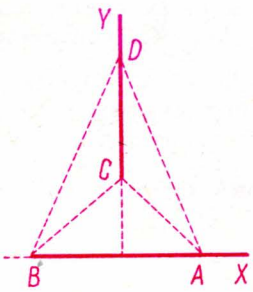


Fig. 2.31

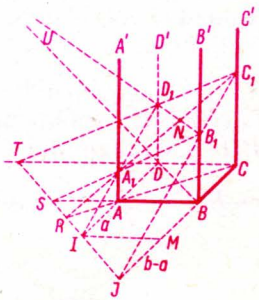


Fig. 2.32

$$\frac{AI}{AD}=\frac{IA_1}{A_1D_1};\ \frac{a}{l}=\frac{A_1I}{A_1D_1}\ \text{și cum}\ \operatorname{tg}\alpha=\frac{AA_1}{a}=K=\operatorname{tg}\widehat{AIA_1}$$

$$\cos\alpha=\frac{a}{A_1I}\ ;\ A_1I=a\sqrt{1+K^2};\quad A_1D_1=\frac{A_1I}{a}=\sqrt{1+K^2}.$$

Din asemănarea triunghiurilor dreptunghice BB_1S și AA_1S ($S=AB\cap\cap A_1B_1$) putem scrie

$$\frac{BB_1}{AA_1}=\frac{SA+AB}{SA}=\frac{SA_1+A_1B_1}{SA_1},$$

deci

$$\frac{bk}{ak}=\frac{SA+1}{SA}=\frac{SA_1+A_1B_1}{SA_1},\quad SA=\frac{a}{b-a},$$

$$SA_1=\frac{a}{b-a}\sqrt{1+k^2(b-a)^2}\ ;\ \frac{b}{a}=\frac{SA_1+A_1B_1}{SA_1};\quad A_1B_1=\sqrt{1+k^2(b-a)^2}.$$

Din asemănarea triunghiurilor dreptunghice RCC_1 și RAA_1 ($R=AC\cap\cap A_1C_1$), ținînd seama că $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{2}$ deducem $CC_1=$ $=K(b+1)$ așa că $RA=\dfrac{a\sqrt{2}}{b-a+1}$, $A_1C_1=\sqrt{(b-a+1)^2+2}$. Pentru aflarea diagonalei B_1D_1 se pot folosi triunghiurile dreptunghice asemenea UBB_1 și UDD_1 ($U=BD\cap B_1D_1$) sau să se aplice teorema lui Pitagora generalizată, în triunghiul $B_1C_1D_1$, în care se cunoaște mediana NC_1. ● **33.** 1°. Muchia AD face cu planul feței ABC unghiul α; înălțimea tetraedrului, dusă din vîrful D este atunci cît $a\sin\alpha$, deci $V=\dfrac{1}{3}\,ab\,l\sin\alpha$ (Fig. 2.33. a). 2°. Să ducem prin muchia BC planul perpendicular pe AB; atunci muchia AD este paralelă cu el și se proiectează în adevărata mărime pe el, după $BD'=AD=a$. În triunghiul CBD' avem $CB=b$; $BD'=a$ și $\widehat{CBD'}=\alpha$. Perpendiculara comună la AB și CD este paralelă cu acest plan și prin urmare se proiectează în adevărata mărime, după înălțimea BH' a triunghiului CBD'. Dacă notăm aria triunghiului CBD' cu S, atunci $BH'=\dfrac{2S}{CD'}$ și cum $S=\dfrac{1}{2}\,ab\sin\alpha$ și $CD'^2=a^2+b^2-2ab\cos\alpha$ rezultă că

$$BH'=\frac{ab\sin\alpha}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}}.$$

Pentru determinarea poziției perpendicularei comune lui AB și CD, construim înălțimea BH' a triunghiului BCD' (fig. 2.33 b). În H' ridicăm perpendiculara pe planul de proiecție, care taie pe CD în H. Planul dus prin H perpendicular pe AB taie muchia AB în al doilea picior al perpendicularei comune. 3°. Dacă presupunem că sfera de

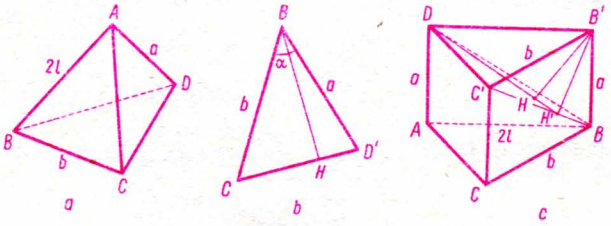


Fig. 2.33

diametru AB ar fi tangentă la CD în punctul P atunci și muchiile AD și BC sînt tangente la sferă, de unde $CP=CB=b$; $DP=DA=a$ așa că $DC=a+b$ (Fig. 2.33 c). Dar la distanța DD' de la punctul D pînă la planul BCD' este $2l$, deci $DC^2=DD'^2+D'C^2=4l^2+a^2+b^2-2ab\cos\alpha$ și egalînd cele două valori ale lui DC avem $a^2+b^2+2ab=4l^2+a^2+b^2-$ $-2ab\cos\alpha$; $4l^2=2ab(1+\cos\alpha)=4ab\cos^2\frac{\alpha}{2}$ asa că $l^2=ab\cos^2\frac{\alpha}{2}$ este relația căutată. Dacă $\alpha=\frac{\pi}{2}$, $2l^2=ab$. 4°. Dacă construim prisma triunghiulară $ABCDB'C'$ care are ca bază și secțiune normală triunghiul dreptunghic ABC atunci triunghiul $DB'C'$ este dreptunghic în B' căci și baza inferioară (ABC) este dreptunghică în B. Perpendiculara comună lui AC și DB este egală cu înălțimea piramidei $ADC'B$ dusă din A pentru că această înălțime este perpendiculară pe DB și pe DC' și prin urmare perpendiculară și la paralela AC a lui DC'. Pe de altă parte, cele două tetraedre $ADC'B$ și $B'DC'B$ sînt echivalente, pentru că au aceeași înălțime dusă din vîrful C' și ca baze, triunghiurile ADB și $DB'B$, egale, ca jumătăți ale dreptunghiului $ADB'B$. Rezultă că înălțimile celor două piramide, duse din A și din B' sînt egale. Dacă $B'H'$ este înălțimea triunghiului $BB'C'$, planul $DB'H'$ este perpendicular pe BC', pentru că dreapta BC' din planul CBB' este perpendiculară în B pe AB și deci este perpendiculară și pe paralela ei DB', așa că este perpendiculară pe două drepte, pe DB' și $B'H'$, din planul $DB'H'$, deci este perpendiculară pe plan. Rezultă că este perpendicu-

lară pe dreapta DH' din acest plan. Dreapta BC' fiind perpendiculară pe planul $DB'H'$, atunci planul $DC'B$ care trece prin această dreaptă este perpendicular pe planul $DB'H'$ și înălțimea $B'H$ a triunghiului $DB'H'$ este înălțimea tetraedrului $B'DC'B$. Avem

$$B'H=\frac{DB'\cdot B'H'}{DH'},$$

iar din triunghiul $C'B'B$, dreptunghic în B', se obține

$$B'H'=\frac{B'C'\cdot B'B}{BC'}=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Apoi $DH'^2=DB'^2+B'H'^2=4l^2+\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$ dar pentru că $4l^2=2ab$, avem

$$DH'^2=\frac{2ab\,(a^2+b^2)+a^2b^2}{a^2+b^2}$$

și

$$B'H^2=\frac{DB'^2\cdot B'H'^2}{DH'^2}=\frac{2a^2b^2}{2(a^2+b^2)+ab}.$$

● **34.** 1° Triunghiurile dreptunghice SOA, SOB, SOC sînt egale avînd catetele respectiv egale deci $SA=SB=SC$ cum și

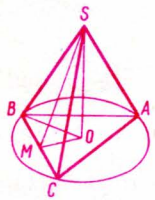


Fig. 2.34

$\widehat{SAO}=\widehat{SBO}=\widehat{SCO}=x$ (Fig. 2.34).

Fie M mijlocul lui BC. Triunghiul dreptunghic BMS ne va da

$$\sin\frac{\widehat{BSC}}{2}=\sin\widehat{BSM}=\frac{BM}{BS}$$

ori, pe de altă parte, triunghiurile dreptunghice SOB și OBM ne dau, ținînd seama că $\widehat{BOM}=\frac{\widehat{BOC}}{2}=\widehat{BAC}=\hat{A}$ (unghiul la centru fiind dublul unghiului înscris), $BO=BS\cos x$ și $BM=BO\sin\widehat{BOM}=BS\cos x\sin A$ avem apoi că $\sin\frac{\widehat{BSC}}{2}=\frac{BM}{BS}=\sin A\cos x$. Prin permutări obți-

nem și $\sin\frac{\widehat{CSA}}{2}=\sin B\cos x$ și $\sin\frac{\widehat{ASB}}{2}=\sin C\cos x$. În cazul cînd $BSC=\frac{\pi}{2}$ avem $\sin\frac{\pi}{4}=\sin A\cos x$ de unde $\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}\sin A}$. 2° În acest caz avem $\frac{\widehat{BSC}}{2}=\frac{\widehat{CSA}}{2}=\frac{\widehat{ASB}}{2}$ sau $\sin A\cos x=\sin B\cos x=$ $=\sin C\cos x$ sau $\sin A=\sin B=\sin C$ de unde $BC=CA=AB$ deci triunghiul este echilateral. 3° a) $\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}\sin A}=\frac{1}{\sqrt{2}\sin 60°}=\sqrt{\frac{2}{3}}$

$$\sin x=\frac{1}{\sqrt{3}}\text{ și }\operatorname{tg}x=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

deducem $OS=OB\operatorname{tg}x=\frac{R}{\sqrt{2}}$. b) În acest caz tetraedrul e regulat. Avem: $\frac{\widehat{BSC}}{2}=\frac{\widehat{CSA}}{2}=\frac{\widehat{ASB}}{2}=30°$ precum și $\sin A\cos x=\sin 30°$ sau $\cos x=$ $=\frac{1}{\sqrt{3}}$ și $\sin x=\sqrt{\frac{2}{3}}$ iar $OS=R\operatorname{tg}x=R\sqrt{2}$ care este latura pătratului înscris în cercul ABC. În triunghiul echilateral ABC, $\widehat{OBM}=30°$ de unde $BM=OB\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{R\sqrt{3}}{2}$ și $R=\frac{2\cdot BM}{\sqrt{3}}=\frac{a}{\sqrt{3}}$ unde notăm prin a muchia tetraedrului. Înălțimea OS va fi deci

$$OS=R\sqrt{2}=a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

● **35.** 1°. Baza mare a trapezului este cît latura triunghiului echilateral înscris în cerc, $R\sqrt{3}$; baza mică este cît latura hexagonului regulat înscris, R; arcele de cerc, cuprinse între coarde paralele, sînt egale și dacă cele două baze sînt de o parte și de alta a centrului cercului, ele au măsura $\frac{360°-(120+60°)}{2}=\frac{180°}{2}=90°$ deci coardele care reprezintă laturile neparalele ale trapezului sînt laturile pătratului înscris în cerc $R\sqrt{2}$. (fig. 2.35). Dacă bazele sînt de aceeași parte a centrului

cercului, arcele cuprinse între laturile paralele au măsura 30°, coardele care reprezintă laturile neparalele ale trapezului, se obțin dintr-un triunghi dreptunghic în care una din catete este $\frac{l_3-l_6}{2}=\frac{R(\sqrt{3}-1)}{2}$ și cealaltă este diferența apotemelor $a_6-a_3=\frac{R\sqrt{3}}{2}-\frac{R}{2}=\frac{R}{2}(\sqrt{3}-1)$. Se găsește $R\sqrt{2-\sqrt{3}}=R\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$. Perimetrul trapezului este $R(1+2\sqrt{2}+\sqrt{3})$ iar aria este

$$\frac{R^2}{2}(2+\sqrt{3}).$$

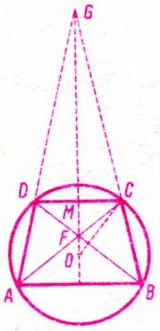


Fig. 2.35

La fel pentru cazul cînd bazele sînt de aceeași parte a centrului:

$$p=R(1+\sqrt{3}+\sqrt{6}-\sqrt{2}).$$

Pentru calculul ariei avem $S=\frac{R^2}{2}(2+\sqrt{3})$, sau în cazul al doilea $S=\frac{R^2}{2}$. 2°.Pentru calculul diagonalei folosim teorema lui Pitagora generalizată $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos 75°=R^2(2+\sqrt{3})$. Diagonalele trapezului sînt perpendiculare, căci suma arcelor AB și CD este de 180°. Dacă F este punctul de intersecție al diagonalelor, atunci distanța de la el pînă la baza mică, CD, este $\frac{R}{2}$.Dacă notăm cu G intersecția laturilor neparalele, din asemănarea triunghiurilor GDC și GAB deducem $MG=\frac{R}{2}(2+\sqrt{3})$ unde M este mijlocul bazei mici, iar $FG=\frac{R}{2}(3+\sqrt{3})$. Cînd bazele trapezului sînt de aceeași parte a centrului cercului circumscris judecata este absolut asemănătoare și se obține:

$$AC=R\sqrt{2};\ MF=\frac{R}{2}(2-\sqrt{3});\ MG=\frac{R}{2};\ FG=\frac{R}{2}(3-\sqrt{3}).$$

3°. Centrul sferei circumscrise prismei se găsește pe perpendiculara ridicată în centrul cercului circumscris trapezului, pe planul trapezului, la distanța de planul bazei, cît jumătatea înălțimii prismei, deci $d=\frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$ și raza sferei se obține cu teorema lui Pitagora:

$$\rho^2=O_1A^2=\frac{R^2}{4}(6+\sqrt{3}).$$

Pentru cazul cînd bazele trapezului sînt de aceeași parte a centrului cercului circumscris

$$\rho^2=O_1A^2=OA^2+OO_1^2=R^2+\frac{R^2}{2}=\frac{3R^2}{2}.$$

Aria sferei fiind $S=4\pi\rho^2=\frac{4\pi R^2(6+\sqrt{3})}{4}=\pi R^2(6+\sqrt{3})$ iar volumul

$$V=\frac{4\pi\rho^3}{3}=\frac{4\pi}{3}\cdot\rho^2\cdot\rho=\frac{\pi R^2(6+\sqrt{3})}{3}\cdot\frac{R}{2}\sqrt{6+\sqrt{3}}=\frac{\pi R^3}{6}(6+\sqrt{3})^{3/2}.$$

În cazul al doilea avem $S=\frac{4\pi\cdot 3R^2}{2}=6\pi R^2$; $V=4\pi R^3\cdot\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}=$

$=6\pi R^3\sqrt{\frac{3}{2}}$. ● **36.** Fie $ABCDE$ piramida dată și trapezul de secțiune $BCFG$. Notînd cu M, N și H mijloacele laturilor BC, DE și FG în triunghiul HMN, avem (Fig. 2.36):

$$\frac{HM}{\sin\alpha}=\frac{HN}{\sin\beta}=\frac{a}{\sin(\alpha+\beta)}$$

deci

$$HM=\frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)},\quad HN=\frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Notînd cu O centrul pătratului $BCDE$, din triunghiul dreptunghic AON, avem

$$AN=\frac{a}{2\cos\alpha},\quad AH=\frac{a\sin(\alpha-\beta)}{2\cos\alpha\sin(\alpha+\beta)}$$

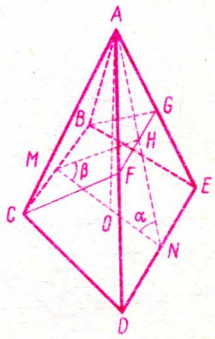


Fig. 2.36

Rezultă apoi

$$FG=\frac{a\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$$

și aria căutată este

$$S=\frac{a^2\sin^2\alpha\cos\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)}.$$

● **37.** Avem $BE=m\cos\alpha$, $BF=m\cos\beta$, deci

$$V=\frac{4}{3}m^3\cos\alpha\cos\beta\sqrt{\sin^2\alpha-\cos^2\beta}$$

(Fig. 2.37). ● **38.** Ducem C_1D_2 egal și paralel cu OA_2. $C_1C_2B_2D_2$ este un paralelogram, deci diagonalele lui se întîlnesc în mijlocul lor, N_2. În triunghiul $C_2B_1D_2$, N_1N_2 este linie mijlocie, deci este paralelă cu B_1D_2 și egală cu jumătatea ei. Dar prin construcție, triunghiurile OA_1A_2 și $C_1B_1D_2$ au laturile două cîte două paralele și egale. Deci linia mijlocie M_1M_2 din triunghiul OA_1A_2 este egală și paralelă cu N_1N_2. Rezultă același lucru pentru M_1N_1 și M_2N_2 (Fig.2.38). ● **39.** $EF\parallel CD$; $GH\parallel CD$ deci $EF\parallel GH$. Triunghiurile AEF și BGH sînt echilaterale. Urmează (Fig. 2.39 a, b).

$$EF=AE=AC-EC=a-x$$

$$GH=BG=BC-GC=a-y$$

$FH^2=DF^2+DH^2-2FD\cdot DH\cos 60^\circ=x^2-xy+y^2$. Dacă notăm înălțimea trapezului cu $EK=h$

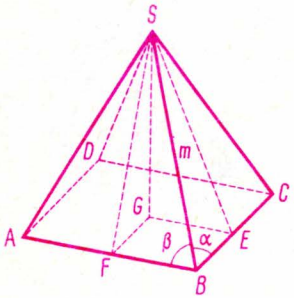


Fig. 2.37

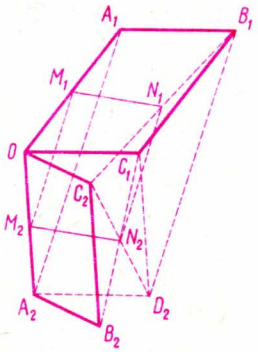


Fig. 2.38

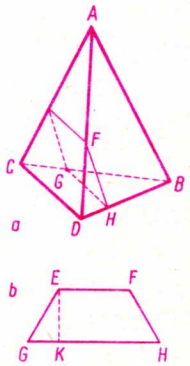


Fig. 2.39

$$EK^2=EG^2-GK^2=x^2-xy+y^2-\frac{l^2}{4}$$

așa că $h^2=(a-x)\ (a-y)=a^2-a(x+y)+xy=x^2-xy+y^2-\frac{l^2}{4}$ și

$x+y=\frac{4a^2-3l^2}{4a}$. Evident $a>\frac{l\sqrt{3}}{2}$ și $x=\frac{1}{2}\left(\frac{4a^2-3l^2}{4a}-l\right)=$

$=\frac{(2a+l)^2-4l^2}{8a}$ deci $(2a+l)^2-4l^2>0$ deci $2a+l-2l>0$, $a>\frac{l}{2}$. Pe

de altă parte $y=\frac{1}{2}\left(\frac{4a^2-3l^2}{4a}-l\right)=\frac{(2a-l)^2-4l^2}{8a}$ și deci $a>\frac{3l}{2}$. 2°.

$EF=GH=\frac{2a}{3}$; $EG^2=\left(\frac{a}{3}\right)^2$. Patrulaterul a devenit dreptunghi, de arie

$EF\cdot h=\frac{2a}{3}\cdot\frac{a}{3}=\frac{2a^2}{9}$. Aria $DHF=$Aria CGE și $x^2\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{a^2\sqrt{3}}{a\cdot 4}$ așa că

$CDHG=CDEF=ACD-AEF=\frac{5a^2\sqrt{3}}{4\cdot 9}$. Aria solidului considerat este

$$A=\frac{2a^2}{9}+\frac{a^2\sqrt{3}}{9\cdot 2}+\frac{5a^2\sqrt{3}}{9\cdot 2}=\frac{a^2}{9}(2+3\sqrt{3}),$$

iar volumul trunchiului de prismă $V=\frac{a^2\sqrt{2}}{36\cdot 3}\left(\frac{2a}{3}+\frac{2a}{3}+a\right)=\frac{7a^2\sqrt{2}}{324}$,

căci muchia AB a tetraedrului $ABCD$ este perpendiculară pe CD așa că prin FH se poate duce un plan perpendicular pe CD.

● **40.** 1°. $AA_1=\frac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow AI=\frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$, $OI=\sqrt{a^2-\frac{3a^2}{9}}=$

$=\frac{a\sqrt{6}}{3}$, $MI=\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Notăm cu N mijlocul segmentului AI și vom avea $A_1N=AI=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Calculăm $MA_1 = \sqrt{MI^2 + A_1I^2} = \sqrt{\frac{6a^2}{36} + \frac{3a^2}{36}} = \frac{a}{2}$. Cum $MN \| OA$ avem (Fig. 2.40).

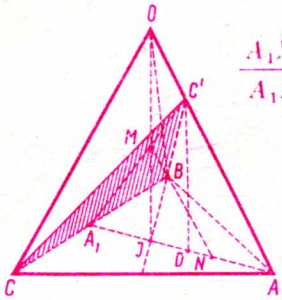


Fig. 2.40

$$\frac{A_1M}{A_1N} = \frac{A_1C'}{A_1A} \Rightarrow A_1C' = \frac{A_1M \cdot A_1A}{A_1N} = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{3}} = \frac{3a}{4}$$

$$A_{CBC'} = \frac{1}{2} \cdot CB \cdot A_1C' = \frac{1}{2} a \cdot \frac{3a}{4} = \frac{3a^2}{8}.$$

2) Notăm cu $C'D$ înălțimea acestei piramide

$$\frac{C'D}{MI} = \frac{C'A_1}{MA_1} \Rightarrow C'D = \frac{MI \cdot C'A_1}{MA_1} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{6} \cdot \frac{3a}{4}}{\frac{a}{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

Volumul piramidei va fi

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_{ABC} \cdot C'D = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{4},$$

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{16}.$$

● **41.** Dacă notăm r_1, r_2, r_3, r_4 razele cercurilor înscrise fețelor tetraedrului, cu p_1, p_2, p_3, p_4 semiperimetrele fețelor și S_1, S_2, S_3, S_4 ariile acestor fețe, avem:

$$r_1p_1 + r_2p_2 + r_3p_3 + r_4p_4 = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = S.$$

Produsul $r_1p_1r_2p_2r_3p_3r_4p_4$ este maxim cînd $r_1p_1 = r_2p_2 = r_3p_3 = r_4p_4$ sau $S_1 = S_2 = S_3 = S_4$, caz în care tetraedrul este regulat. Deci produsul $r_1p_1r_2p_2r_3p_3r_4p_4 \leqslant S_1S_2S_3S_4 = \left(\frac{S}{4}\right)^4$. Relația se mai poate scrie și

$$r_1r_2r_3r_4 \leqslant \frac{S^4}{4^4p_1p_2p_3p_4}.$$

În cazul tetraedrului regulat $p_1=p_2=p_3=p_4=\frac{3a}{2}$ unde a este muchia tetraedrului și

$$S=4\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=a^2\sqrt{3}\,;\quad S^2=3a^4.$$

Rezultă

$$r_1r_2r_3r_4 \leqslant \frac{S^2}{16\cdot 27} \text{ sau}$$

$$(2r_1)\,(2r_2)\,(2r_3)\,(2r_4) \leqslant \frac{S^2}{27} \text{ sau}$$

$$d_1d_2d_3d_4 \leqslant \frac{S^2}{27}.$$

● **42.** 1° Relațiile $AB=BC$, $CD=DA$ arată că B și D sînt respectiv echidistante față de A și C deci că $BD\perp AC$. Luăm $AE=\|BD$ rezultă că $AE\perp AC$ și triunghiul dreptunghic CAE ne va da

$$CE^2=AC^2+AE^2=9a^2+11a^2=20a^2.$$

În triunghiul CDE, avem $CD^2+DE^2=16a^2+$ $+BA^2=16a^2+4a^2=20a^2$ deci $CD^2+DE^2=$ $=CE^2$ deci unghiul $\widehat{CDE}=90°$ sau că AB, paralela cu DE este ortogonală cu CD. Se demonstrează analog că $BC\perp AD$ ceea ce rezultă imediat din motive de simetrie (Fig. 2.42). 2° și 3° Planul ce trece prin BD și perpendicular pe AC taie această muchie în mijlocul său H, pe motive de simetrie și lungimea perpendicularei comune la AC și BD este înălțimea HK a triunghiului BHD. Avem

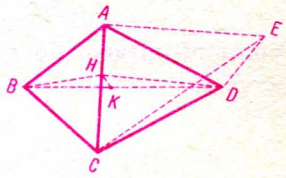


Fig. 2.42

$$BH^2=AB^2-AH^2=4a^2-\frac{9}{4}a^2=\frac{7a^2}{4}$$

$$DH^2 = AD^2 - AH^2 = 16a^2 - \frac{9a^2}{4} = \frac{55a^2}{4}.$$

Aria triunghiului BHD de semiperimetru

$$p = \frac{a}{4}(\sqrt{7} + \sqrt{55} + \sqrt{44})$$

are ca pătrat

$$S^2 = p\left(p - \frac{a\sqrt{7}}{2}\right)\left(p - \frac{a\sqrt{55}}{2}\right)(p - a\sqrt{11})$$

și efectuînd calculele și simplificînd

$$S^2 = \frac{19a^4}{4} \quad \text{sau} \quad S = \frac{a^2\sqrt{19}}{2}.$$

Dar avem de asemenea

$$S = \frac{BD \cdot HK}{2}$$

de unde

$$h = HK = \frac{2S}{BD} = \frac{a^2\sqrt{19}}{a\sqrt{11}} = a\sqrt{\frac{19}{11}} = \frac{a\sqrt{209}}{11} \simeq 1{,}3142\ a.$$

Volumul tetraedrului este suma volumelor piramidelor $ABDH$ și $CBDH$ și va fi

$$V = BDH\left(\frac{AH}{3} + \frac{HC}{3}\right) = S \cdot \frac{AC}{3} = \frac{a^2\sqrt{19}}{2} \cdot \frac{3a}{3} = \frac{a^3\sqrt{19}}{2} \simeq 2{,}1794a^3.$$

Ducem prin CD un plan perpendicular pe AB; acest plan taie tetraedrul după un triunghi de arie S' și înălțime h' corespunzătoare laturei CD a triunghiului. Avem

$$S' = \frac{h' \cdot CD}{2} = \frac{h' \cdot 4a}{2} = 2ah'.$$

Pe de altă parte, volumul tetraedrului, descompus în două piramide de bază comună S' și suma înălțimilor $AB=2a$ se scrie

$$V=S'\cdot\frac{AB}{3}=2ah'\cdot\frac{2a}{3}=\frac{4a^2}{3}\cdot h' \text{ de unde}$$

$$h'=\frac{3V}{4a^3}=\frac{3}{4a^2}\cdot\frac{a^3\sqrt{19}}{2}=\frac{3a\sqrt{19}}{8}\simeq 1{,}6346a.$$

Calculăm în mod analog distanța h'' a lui BC la AD și se observă că ea este egală cu h' din motive de simetrie. 4) Fie r raza sferei înscrise de centru O. Tetraedrul este suma a patru piramide, de vîrf comun O, avînd ca baze fețele tetraedrului și ca înălțimi egale raza r. Volumul tetraedrului este deci, notînd cu s aria sa,

$$V=s\cdot\frac{r}{3} \text{ de unde } r=\frac{3V}{s}.$$

Să calculăm s

$$\text{aria } ABC=\frac{BH\cdot AC}{2}=\frac{3a^2\sqrt{7}}{4}$$

$$\text{aria } ADC=\frac{DH\cdot AC}{2}=\frac{3a^2\sqrt{55}}{4}$$

pentru ABD cu semiperimetru $p=\frac{1}{2}(2a+4a+a\sqrt{11})$ $(\text{aria } ABD)^2=$

$$=\frac{a^4}{16}(2+4+\sqrt{11})(-2+4+\sqrt{11})(2-4+\sqrt{11})(2+4-\sqrt{11})=\frac{25\cdot 7a^4}{16}$$

$\text{aria } ABD=\frac{5a^2\sqrt{7}}{4}$, în fine $BCD=ABD$. Rezultă deci

$$s=\frac{a^2}{4}(3\sqrt{7}+3\sqrt{55}+10\sqrt{7})=\frac{a^2}{4}(13\sqrt{7}+3\sqrt{55})$$

și

$$r=\frac{3a^3\sqrt{19}}{2}\cdot\frac{4}{a^2(13\sqrt{7}+3\sqrt{55})}=\frac{6a\sqrt{19}}{13\sqrt{7}+3\sqrt{55}}=$$

$$= \frac{6a\sqrt{19}(13\sqrt{7}-3\sqrt{55})}{688} \approx 0{,}4617a.$$

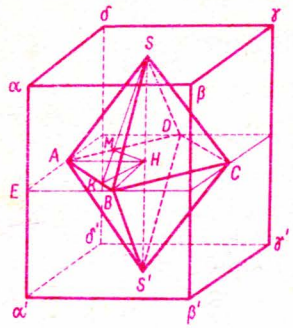


Fig. 2.43

● **43.** 1) $V = \frac{abc}{6}$;

2) $R = \frac{abc}{2\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}}$;

3) $y = \sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}$;

4) $y_{max} = \frac{a^2\sqrt{5}}{2}$ (Fig. 2.43).

● **44.** (Fig. 2.44). ● **45.** 1) $\widehat{BD} = \widehat{DC} = \widehat{BC} = 120°$ (Fig. 2.45). 2) Ca oblice care au picioarele egal depărtate de piciorul perpendicu-

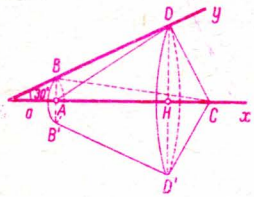


Fig. 2.44

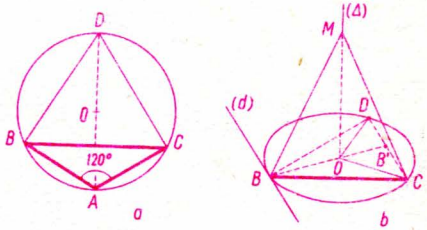


Fig. 2.45

larei. 3) $V = 54\sqrt{6}\,\text{cm}^3$. 4) $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{4}$. 5) $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{8}$. 6) $g_1 + 2g_2 = 1$. ● **46.** 1) $S = 2\pi(4R^2 - 2Rx + x^2)$ (Fig 2.46). $V = \pi Rx(2R - x)$. 2) $S_1 = 2\pi(2R^2 - Rx + x^2), V_1 = \frac{\pi xR}{2}(3R - 2x)$. ● **47.** 1) $AB = AC = BC = R\sqrt{3}$ (Fig. 2.47). 2) $K = \frac{2}{3}$. 3) $V = \frac{\pi R^3}{6}$ (volumul sferei cu diametrul R).

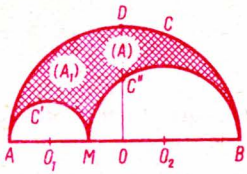


Fig. 2.46

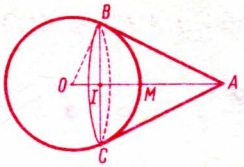


Fig. 2.47

● **48.** 1° $V=\frac{\pi R^3}{3}\sin x(2-\cos x)$ (Fig. 2.48). 2°3° $\cos x=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$; $\sin x=\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}$. ● **49.** 1° $CI=x$, $DI=y$, $xy=a^2$ (Fig 2.49). 2° $x,y=m\pm\sqrt{m^2-a^2}$, $S_{min}=4\pi a^2$. 3° Cele două volume sînt egale cu $\frac{2\pi a}{3}(x^2+$

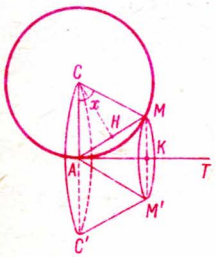


Fig. 2.48 a

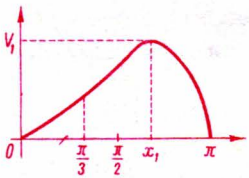


Fig. 2.48 b

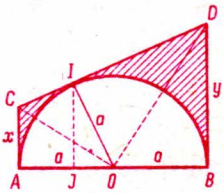


Fig. 2.49

$+y^2-a^2$). ● **50.** Planul $OBO'B'$, care conține dreapta OO', intersectează triunghiul $A'BC'$ după mediana BM, unde M este punctul de intersecție al diagonalelor paralelogramului $A'B'C'O'$, așa ca $A'M=MC'$. Punctul N de intersecție al dreptei OO' cu triunghiul $A'BC'$ este pe această mediană. Observăm că $OBO'B'$ este un paralelogram. Diagonalele lui, OO' și BB', se taie într-un punct P la jumătatea lor. În triunghiul $O'BB'$, medianele BM și $O'P$ se taie la două treimi de vîrful lor, deci $BN=\frac{2}{3}BM$, deci punctul N este centrul de greutate al

triunghiului $BA'C'$. ● **51.** 1° $V=\frac{\pi Rx}{3}(4R-x)$. 2° $m\in\left[0,\frac{3-2\sqrt{2}}{2}\right]\cup$

$\cup\left[\frac{3+2\sqrt{2}}{2},\ +\infty\right)$. ● **52.** Avem $AB=\frac{a}{2}$. Notînd cu D mijlocul corzii MN, avem $OD=a\sin x$ și apoi $DM^2=R^2-OD^2=R^2-a^2\sin^2 x$ și deci $NM=2\sqrt{R^2-a^2\sin^2 x}$. Fie E piciorul perpendicularei coborîte din S pe AMN. Notînd $BE=d$ și $SE=h_1$, din triunghiul BEA avem $d=\frac{a}{2}\sin x$, iar din triunghiul SEB, $h_1^2=h^2+d^2=\frac{4h^2+a^2\sin^2 x}{4}$. Volumul căutat are expresia

$$V=\frac{\pi}{6}(4h^2+a^2\sin^2 x)\sqrt{R^2-a^2\sin^2 x}.$$

● **53.** Se notează cu R raza sferei circumscrisă trunchiului de con, cu r raza sferei înscrisă și cu a și b razele cercurilor de bază ale trunchiului de con, cu condiția $a<b$. O secțiune axială în trunchiul de con are forma din Fig. 2.53. În triunghiul dreptunghic AO_1D avem $ab=r^2$ iar din triunghiurile dreptunghice DOF și AEO deducem

$$OE^2=R^2-a^2=(2r+OF)^2\ ;\ OF=\pm\sqrt{R^2-b^2}$$

luînd semnul $+$ cînd F este în O și E. Din enunț rezultă $\frac{4\pi R^2}{4\pi r^2}=6$ deci

$$6-\frac{a}{b}=\left(2\pm\sqrt{6-\frac{b}{a}}\right)^2$$

Dacă notăm $\frac{b}{a}=x$ avem $6-\frac{1}{x}=(2\pm\sqrt{6-x})^2$ sau $x^2+8x-82+$

$+\frac{8}{x}+\frac{1}{x^2}=0$. Pentru $x=3+2\sqrt{2}$ punctul O este în afara trapezului $ABCD$ iar pentru $x=3-2\sqrt{2}$ punctul O este în interiorul trapezului. ● **54.** 1°. Suma volumelor celor două conuri este $V=$

$=\frac{\pi}{3}(OS\cdot OA^2+SO'\cdot O'C^2)=\frac{\pi}{3}\left[\frac{R\sqrt{R^2-x^2}}{R+x}R^2+\frac{x\sqrt{R^2-x^2}}{R+x}x^2\right]$ căci tri-

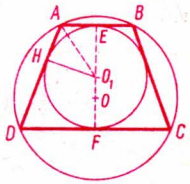


Fig. 2.53

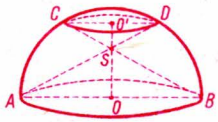


Fig. 2.54

unghiurile $CO'S$ și BOS sînt asemenea iar triunghiul $O'SC$ este dreptunghic (Fig. 2.54). Volumul sferei cu diametrul OO' este

$$v=\frac{\pi OO'^3}{6}=\frac{\pi\,(R^2-x^2)^{3/2}}{6}$$

Raportul volumelor este dat de $y=\dfrac{R^3+x^3}{(R+x)\sqrt{R^2-x^2}}=\dfrac{R^2-Rx+x^2}{\sqrt{R^2-x^2}}$.

2°. Pentru x se obține ecuația

$$x^2-\frac{Rx}{1+m}+\frac{1-m}{1+m}\,R^2=0,$$

care are rădăcini reale dacă $0\leqslant m\leqslant\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ întrucît m nu poate fi decît pozitiv. Cum x nu poate lua decît valori între 0 și R, în discuție sînt necesare numerele $f(0)=\dfrac{1-m}{1+m}R^2$, $f(R)=\dfrac{R^2}{1+m}$. Pentru ca ecuația precedentă să aibă două rădăcini cuprinse între 0 și R, trebuie ca $f(0)>0$ și $f(R)>0$ deci $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\leqslant m\leqslant 1$, iar pentru ca să aibă o singură rădăcină (reală) în același interval, trebuie ca $f(0)<0$ și $f(R)>0$ deci $m>1$.

● **55.** 1°. $S=\dfrac{OH\cdot MP}{2}=\dfrac{R^2\sin\alpha}{2}$. Maxim $\sin\alpha=1$, $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$; $S_{max}=\dfrac{R^2}{2}$.

2°. $MH=\sqrt{R^2-x^2}$ și $y=\dfrac{\pi}{3}\,OH\cdot MH^2=\dfrac{\pi x}{3}(R^2-x^2)$. 3°. $y'=\dfrac{\pi}{3}(R^2-3x^2)$.

Avem maxim cînd $x=\frac{R}{\sqrt{3}}$; valoarea maximului $y=\frac{2\pi R^3\sqrt{3}}{27}$ (Fig. 2.55 a,b). ● **56.** 1°. $V=\frac{h}{3}\left[\frac{3R^2\sqrt{3}}{2}+\frac{3r^2\sqrt{3}}{2}+\frac{3Rr\sqrt{3}}{2}\right]$; $A=\frac{3R^2\sqrt{3}}{2}+$

$+\frac{3r^2\sqrt{3}}{2}+\frac{6(R+r)}{2}\sqrt{h^2+\left[\frac{(R-r)\sqrt{3}}{4}\right]^2}$. 2°. Făcînd o secțiune axială în trunchiul de con, prin două muchii laterale opuse, se obține un trapez isoscel în cercul mare al sferei și muchia laterală este dată de

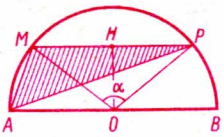


Fig. 2.55 a

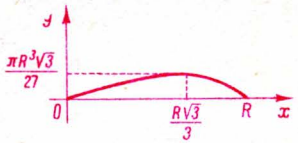


Fig. 2.55 b

$\sqrt{h^2+(R-r)^2}$ așa că cercul mare al sferei este circumscris triunghiului format de diametrul bazei mari, de muchia laterală și de diagonala trapezului isoscel amintit. Dacă ρ este raza sferei circumscrisă atunci $\rho=\frac{abc}{4S}=\frac{2R\sqrt{h^2+(R-r)^2}\sqrt{h^2+(3R-r)^2}}{4Rh}$. 4°. În cazul cînd se poate înscrie o sferă în trunchiul de piramidă, secțiunea axială făcută în sfera înscrisă cu un plan ce trece prin două apoteme opuse ale trunchiului ne dă un trapez isoscel în care este înscris cercul mare al sferei înscrisă. Rezultă $h^2=3Rr$ și raza este $\frac{h}{2}$.

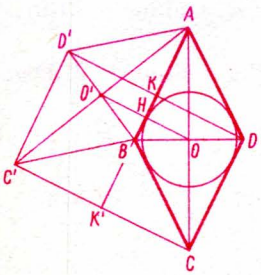


Fig. 2.57

● **57.** 1° Fie H proiecția lui O pe AB. Cercul de centru O și raza $OH=R$ este tangent la AB în H. Din motive de simetrie el este tangent în același timp la celelalte laturi AD, CB și CD deci este cercul cerut. Avem (Fig. 2.57)

$$\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}=\frac{OA^2+OB^2}{OA^2\cdot OB^2}.$$

Ori triunghiul dreptunghic AOB ne dă $OA^2+OB^2=AB^2$ și dublul ariei sale se scrie în două moduri $OA\cdot OB=OH\cdot AB$; avem deci

$$\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}=\frac{AB^2}{OH^2\cdot AB^2}=\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{R^2}.$$

2° Volumul generat este suma volumeler conului ADD' și a cilindrului $CDD'C'$ din care se scade cel al conului BCC'. Triunghiurile ADD' și BCC' sînt egale avînd laturile egale și paralele, deci conurile sînt egale și volumul V este egal cu volumul cilindrului $CDD'C'$ de înălțime $CD=AB$ și avînd raza bazei KD. Triunghiurile asemenea BOH, BDK unde $BD=2\cdot OD$ ne dau

$$\frac{KD}{OH}=\frac{KD}{R}=\frac{BD}{OB}=2;\ KD=2R$$

obținem deci $V=\pi KD^2\cdot CD=4\pi R^2\cdot AB=4\pi R\cdot R\cdot AB=4\pi R\cdot OA\cdot OB$ aplicînd teorema lui Guldin observăm de asemenea că volumul este produsul dintre aria rombului, $2\cdot OA\cdot OB$, prin lungimea cercului de rază OH, deoarece O este centrul de greutate al rombului, din motive de simetrie, deci $V=2\pi OH\cdot 2\cdot OA\cdot OB=4\pi R\cdot OA\cdot OB$. ● **58.** 1° $S=\pi(R^2-x^2)$, $S_1=2\pi R(R-x)$; $S_2=2\pi R(R+x)$ (Fig. 2.58).

2° $S=S_1\left(1-\frac{S_1}{4\pi R^2}\right)$; $S=S_2\left(1-\frac{S_2}{4\pi R^2}\right)$; $S_1S_2(S_1-S_2)=S(S_1^2-S_2^2)$

pentru $S_1-S_2\neq 0$, $S_1S_2=S(S_1+S_2)$. ● **59.** 1° $S=\frac{\pi R(R+x)^2}{x}$ (Fig. 2.59).

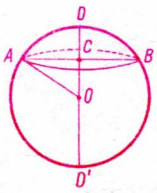


Fig. 2.58

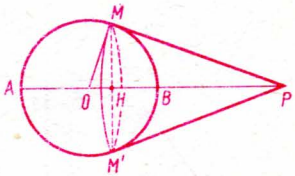


Fig. 2.59

2° $x\in[R(3+2\sqrt{2});\ R(5+2\sqrt{6})]$. ● **60.** $y=-\frac{1}{2R^2}x^2+\frac{1}{R}x$, $x\in[0;\ 2R]$ (Fig. 2.60). Tabelul de variație este

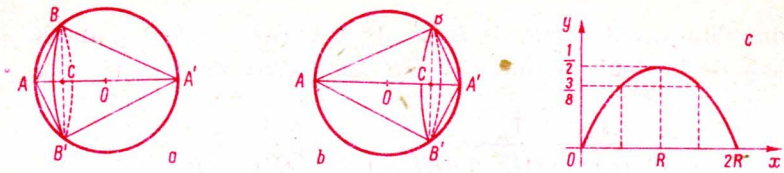


Fig. 2.60 a, b, c

x	0		$\frac{R}{2}$		R		$\frac{3R}{2}$		$2R$
y	0	$\nearrow$	$\frac{3}{8}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$\frac{3}{8}$	$\searrow$	0

(Fig. 2.60 c).

● **61.** Se analizează cazurile cînd unghiul C este ascuțit sau obtuz și se obține

$$V=\frac{\pi}{3}\ DE\cdot BC\,(BC+3\,AD-2\sqrt{AC^2-DE^2}),$$

sau

$$V=\frac{\pi}{3}\ DE\cdot BC\,(BC+3\cdot AD+2\sqrt{AC^2-DE^2}).$$

Din triunghiurile asemenea AGN și ACH deducem pe GN deci și pe GL și de aci volumul (Fig. 2.61). ● **62.** 1° $AH=b\sin C$

$$V_1=\frac{\pi\cdot AH^2\cdot HC}{3}+\frac{\pi\cdot AH^2\cdot BH}{3}=\frac{\pi\cdot AH^2\cdot BH}{3}=\frac{\pi ab^2\sin^2 C}{3}$$ (Fig. 2.62).

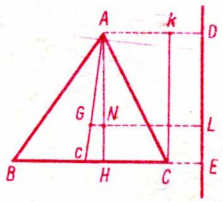


Fig. 2.61

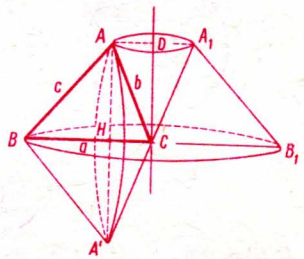


Fig. 2.62

$AD=b\cos C$; $DC=b\sin C$; $BC=a$.

$$V_2=\frac{\pi DC}{3}(AD^2+BC^2+AD\cdot BC)-\frac{\pi\cdot DC\cdot AD^2}{3}=$$

$$=\frac{\pi\cdot DC}{3}(BC^2+AD\cdot BC)=\frac{\pi\cdot DC\cdot BC}{3}(BC+AD);$$

$$V_2=\frac{\pi\cdot b\cdot\sin C\cdot a}{3}(a+b\cos C);\ V_2=\frac{\pi ab\sin C(a+b\cos C)}{3}.$$

2° $a=\sqrt{2}$, $b=1$, $\frac{V_1}{V_2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$$V_1=\frac{\pi\sqrt{2}\sin^2 C}{3};\ V_2=\frac{\pi\sqrt{2}\sin C(\sqrt{2}+\cos C)}{3}$$

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{\pi\sqrt{2}\sin^2 C}{3}\cdot\frac{3}{\pi\sqrt{2}\sin C(\sqrt{2}+\cos C)}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\sqrt{3}\sin C=\sqrt{2}+\cos C$ sau $\sqrt{3}\sin C-\cos C=\sqrt{2}$ sau

$\sin C-\frac{1}{\sqrt{3}}\cos C=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ ecuație ce ne dă $\sin C-\operatorname{tg}30^\circ\cdot\cos C=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$,

$\sin C\cdot\cos 30^\circ-\sin 30^\circ\cos C=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\cos 30^\circ$; $\sin(C-30^\circ)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

sau $\sin(C-30^\circ)=\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin 45^\circ$ de unde $C-30^\circ=45^\circ$ sau $C=75^\circ$.

● **63.** 1° $l_6=\frac{r\sqrt{3}}{3}$ (Fig. 2.63). 2° $S=\frac{10}{3}\pi r^2$; $V=\frac{5}{9}\pi r^3$. ● **64.** $\alpha=\frac{\pi}{3}$ (Fig. 2.64). ● **65.** 1°. Jumătatea diagonalei mari este $l\cos\alpha$ și jumătatea diagonalei mici $l\sin\alpha$; raza cercului înscris este $r=\frac{l\sin 2\alpha}{2}$ și aria rombului $2l^2\sin\alpha\cos\alpha=l^2\sin 2\alpha$ (Fig. 2.65).

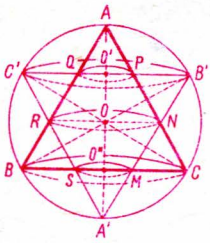


Fig. 2.63

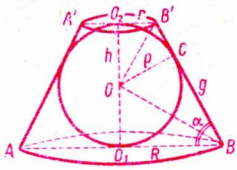


Fig. 2.64

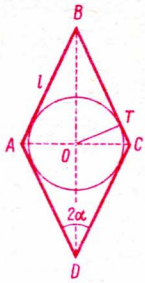


Fig. 2.65

2°. Volumul piramidei este $V=\dfrac{l^2\sin 2\alpha\cdot 2l\cos\alpha}{3}=\dfrac{2l^3\sin 2\alpha\cos\alpha}{3}$.

Aria totală este compusă din aria bazei și din cele patru fețe laterale. Înălțimea unei fețe laterale se obține cu teorema lui Pitagora: $\sqrt{r^2+D^2}=$

$=\sqrt{\dfrac{l^2\sin^2 2\alpha}{4}+4l^2\cos^2\alpha}=\dfrac{2l\cos\alpha\sqrt{\sin^2\alpha+4}}{2}$ 3°. Raza sferei înscrisă în piramidă se obține descompunînd piramida în 5 piramide cu vîrful în centrul sferei și avînd ca baze: fețele laterale ale piramidei și baza piramidei. ● **66.** Notăm cu x înălțimea unui segment sferic (Fig. 2.66). Exprimînd volumele cilindrului și a celor două segmente sferice echivalente cu el vom obține ecuația

$$2x^3-6Rx^2+3R^2x=0.$$

Din a cărei rădăcini convine numai

$$x=\frac{R(3-\sqrt{3})}{2}.$$

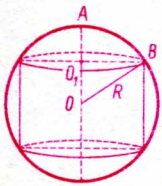


Fig. 2.66

Rezultă că bazele cilindrului se vor afla de o parte și de alta a centrului sferei la distanțe de $\dfrac{R}{2}(\sqrt{3}-1)$ de acesta. ● **67.** 1° Se compară arcele $\overset{\frown}{BC}$ și $\overset{\frown}{CD}$ (Fig. 2.67). 2° Se aplică teorema bisectoarei și

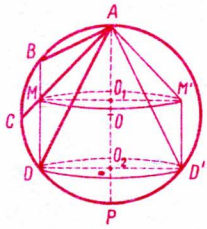


Fig. 2.67

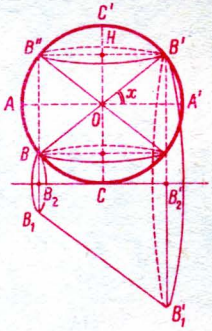


Fig. 2.68

relația lui Stewart

$$BM=\frac{r(\sqrt{3}-1)}{2};\ MD=\frac{r(3-\sqrt{3})}{2};\ AM=\frac{r\sqrt{6}}{2}.$$

3° $V=\dfrac{\pi r^3(3-\sqrt{3})}{4}$.

● **68.** Notînd cu V_1 volumul celor două conuri și V_2 volumul trunchiului de con, se obține (Fig. 2.68)

$$V_1=\frac{2\pi r^3}{3}\sin x\cos^2 x \text{ și } V_2=\frac{2\pi r^3}{3}\cos x\,(3+\sin^2 x).$$

Scriind că $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{1}{8}$ obținem o ecuație în x, $8\sin x\cos x=3+\sin^2 x$

care ne dă soluțiile

$$x_1=26°33'54'' \qquad x_2=56°18'35''.$$

● **69.** 1° Unghiul QRP, înscris într-un semicerc este drept (Fig. 2.69), deci PR este înălțimea piramidei și avem $PR=PQ\sin\alpha=2r\sin\alpha$. Cum $QR=2r\cos\alpha$, latura pătratului cu diagonala QR este $c=\dfrac{QR}{\sqrt{2}}=$

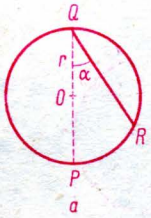


Fig. 2.69 a

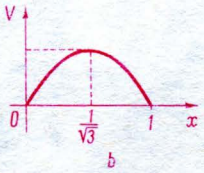


Fig. 2.69 b

Fig. 2.69 c

$=r\sqrt{2}\cos\alpha$ și aria sa, baza piramidei, este $s=c^2=2r^2\cos^2\alpha$. Volumul căutat este

$$V=\frac{4r^3}{3}\sin\alpha\,(1-\sin^2\alpha)=\frac{4r^3}{3}x\,(1-x^2),$$

x variază între zero și unu, valori pentru care V este nul. Avem (Fig. 2.69 b)

x	0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		1
V'		$+$	0	$-$	
V	0	$\nearrow$	$\frac{8r^3}{9\sqrt{3}}$ max	$\searrow$	0

2° Fie PAQ una dintre cele două fețe ale piramidei, limitate de PQ. Planul PAQ, trecînd prin diametrul sferei, o taie după un cerc mare, A fiind pe acesta, deci $\sphericalangle PAQ$ este drept. 3°. Fie PBQ fața simetrică a lui PAQ prin raport cu planul PQR. Din motive de simetrie aceste două fețe sînt triunghiuri dreptunghice egale, ale căror înălțimi au același picior H (Fig. 2.69 c). Unghiul diedru cu muchia PQ este $\widehat{AHB}$. În triunghiul APQ, avem

$$AP=\sqrt{PQ^2-AQ^2}=r\sqrt{2\,(1+x^2)}$$

și scriind aria în două feluri obținem

$$AH=\frac{AQ\cdot AP}{PQ}=r\cos\alpha\sqrt{1+x^2}$$

Dacă C este centrul pătratului $AQBR$, și $\beta = \widehat{AHC}$ avem

$$\sin\beta = \frac{AC}{AH} = \frac{QR/2}{AH} = \frac{r\cos\alpha}{r\cos\alpha\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

și

$$\cos\beta = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

● **70.** 1°. Pentru că în trapez se poate înscrie un cerc, perimetrul este format din 4 jumătăți ale bazei mari și 4 jumătăți ale bazei mici, $b=36$; $B=100$; aria $=4080$ cm^2. 2°. Raza cercului înscris: $r=30$ cm și raza cercului circumscris se obține ținînd seama că cercul căutat trece prin vîrfurile triunghiului ABC, unde AB este baza mare, BC una din laturile egale și AC este diagonala trapezului deci $R = \frac{abc}{4S} = \frac{68\sqrt{514}}{3}$ 3°. Cînd trapezul se rotește în jurul bazei mari avem

$$V_t = V_1 + 2V_2 = \frac{2\pi 60^2}{3}(54+32)\text{ cm}^3.$$

$$A_t = A_1 + 2A_2 = 2\pi 60(36+68)\text{ cm}^2.$$

Cînd se rotește în jurul bazei mici

$$V_t = V_1 - 2V_2 = \frac{\pi 60^2}{3}\cdot 236\text{ cm}^3$$

$$A_t = A_1 + 2A_2 = \pi 120\cdot 168\text{ cm}^2.$$

Cînd se rotește în jurul uneia din laturile egale avem nevoie de unghiul de la baza trapezului, care este dat de $\cos\alpha = \frac{32}{68}$ așa că proiecția bazei mari pe axa de rotație este $100\cos\alpha = \frac{100\cdot 32}{68} \simeq 47{,}06$ cm, proiecția laturii egale pe axa de rotație este $68\cos\beta = -68\cos 2\alpha = 37{,}88$ cm și proiecția bazei mici este $36\cos\alpha \simeq 16{,}94$ cm. ● **71.** Se folosesc relațiile metrice în triunghiul dreptunghic și asemănarea triunghiurilor (Fig. 2.71). 1° Din trapezul dreptunghic $OTT'O'$ se deduce $TT' = 2\sqrt{RR'}$, $A_l = 4\pi RR'$.

2° $OS=\dfrac{R(R+R')}{R-R'}$; $O'S=\dfrac{R'(R+R')}{R-R'}$

$ST=\dfrac{2R\sqrt{RR'}}{R-R'}$; $ST'=\dfrac{2R'\sqrt{RR'}}{R-R'}$

$\rho=\dfrac{2R\sqrt{RR'}}{R+R'}$; $\rho'=\dfrac{2R'\sqrt{RR'}}{R+R'}$

Cazul numeric

$OS=304{,}2$ mm; $O'S=135{,}2$ mm
$ST=280{,}8$ mm; $ST'=124{,}8$ mm
$\rho=108$ mm; $\rho'=48$ mm.

3° $V=\dfrac{16\pi R^2R'^2}{3(R+R')^3}(R^2+R'^2+RR')$.

Caz numeric $V\simeq 2{,}888$ dm^3. ● **72.** 1°. Dreapta TO taie sfera în B (Fig. 2.72). Baza conului este cercul Γ de intersecție a sferei cu un plan ce trece prin A și este perpendicular pe TO. Fie H centrul lui și fie $h=TH$ înălțimea conului. Avem $OT=\sqrt{x^2+R^2}$, $h=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+R^2}}$,

$$AH=\frac{Rx}{\sqrt{x^2+R^2}},\quad OH=\frac{R^2}{\sqrt{x^2+R^2}},\quad BH=R-\frac{R^2}{\sqrt{R^2+x^2}}.$$

Avem rezultatele

$s=\dfrac{\pi Rx^2}{\sqrt{x^2+R^2}}$, aria laterală a conului

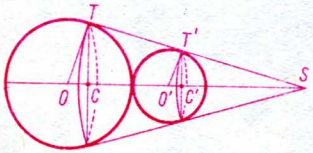


Fig. 2.71

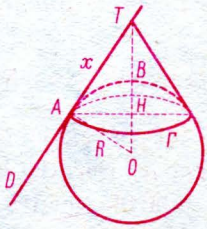


Fig. 2.72

$$V=\frac{\pi R^2x^4}{3(x^2+R^2)^{\frac{3}{2}}},\ \text{volumul conului,}$$

$$\left.\begin{aligned} s_1&=2\pi R^2\left(1-\frac{R}{\sqrt{x^2+R^2}}\right)\\ s_2&=2\pi R^2\left(1+\frac{R}{\sqrt{x^2+R^2}}\right)\end{aligned}\right\}\ \text{ariile celor două calote}$$

2°. Trebuie să avem

$$\pi mR^2=s+s_1=\frac{\pi Rx^2}{\sqrt{x^2+R^2}}+2\pi R^2\left(1-\frac{R}{\sqrt{x^2+R^2}}\right)$$

deci $R(m-2)\sqrt{x^2+R^2}=x^2-2R^2$ și se vede că trebuie ca x^2-2R^2 și $m-2$ să fie de același semn. Punînd $\sqrt{x^2+R^2}=y$, avem ecuația $y^2-R(m-2)y-3R^2=0$, care are rădăcini de semne contrarii, din care cea pozitivă este de reținut. Cantitățile $x^2-2R^2=y^2-3R^2$ și $m-2$ trebuie să fie de același semn, căci altfel ecuația nu poate fi satisfăcută. Deci pentru $0<m<\infty$, avem soluția

$$y=\frac{R}{2}(m-2+\sqrt{m^2-4m+16}),$$

unde $x=\sqrt{y^2-R^2}$. ● **73.** 1°. $S=2\pi R^2(1+\cos 2x)$, $S'=\pi R^2\sin 2x$. Dacă $S=S'$ rezultă $\operatorname{tg} x=2$, deci $x\simeq 63°26'$. Pentru a construi unghiul x, pe perpendiculara în O la AB luăm $OD=2R$. Punctul C este la intersecția lui AD cu cercul (Fig. 2.73). 2°. Trebuie să avem $m=2+2\cos 2x-\sin 2x$, sau exprimînd pe $\sin 2x$ și $\cos 2x$ cu $t=\operatorname{tg} x$, avem $mt^2+2t+m-4=0$ și reținem că $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$, deci $t\geqslant 0$. Ecuația are rădăcini reale dacă $2-\sqrt{5}\leqslant m\leqslant 2+\sqrt{5}$. Avem două rădăcini pozitive dacă $-\frac{2}{m}>0$, deci $m<0$ și dacă $\frac{m-4}{m}>0$, ceea ce este îndeplinit dacă m este negativ. Dacă ecuația are rădăcini de semne contrarii, nu convine decît rădăcina pozitivă. Pentru aceasta trebuie să avem $\frac{m-4}{m}<0$, deci $0<m<4$. Cum $4<2+\sqrt{5}$, rezultă că pentru $2-\sqrt{5}<m<0$, avem pen-

tru ecuația în t și pentru cea în x, două soluții, iar pentru $0<m<4$ numai soluția pozitivă a ecuației în t dă pentru ecuația în x o soluție convenabilă. Pentru $m=2-\sqrt{5}$, avem o rădăcină dublă $t=\sqrt{5}+2$, pentru care $x\simeq 76°43'$. Pentru $m=0$, avem $t=2$ și $x\simeq 63°26'$, iar pentru $m=4$, avem $t=0$ și $x=0$. ● **74.** Ducînd un plan prin centrul sferei și perpendicular pe coarda AB, în acest plan urma planului variabil este DE (Fig. 2.74). 1°. Avem $OF=d\sin x$, $FG=R-d\sin x$, $FH=R+d\sin x$, $EF=\sqrt{R^2-d^2\sin^2 x}$. Atunci $S_1=2\pi R\cdot FH+\pi FE^2=\pi(R+d\sin x)\,(3R-d\sin x)$; $S_2=\pi(R-d\sin x)\,(3R+d\sin x)$. Cum $0\leqslant x\leqslant\pi$, ambele suprafețe totale au la capetele intervalului aceeași valoare $3\pi R^2$. Cum $S_1'=2\pi d\cos x(R-d\sin x)$, S_1 crește pînă la $x=\dfrac{\pi}{2}$ unde are un maxim și apoi descrește. $S_2'=-2\pi d\cos x\,(R+d\sin x)$, deci S_2 descrește pînă la $\dfrac{\pi}{2}$ unde are un minim și apoi crește. 3°. Necunoscuta x se determină din ecuația $\sin^2 x+12\sin x-12=0$. Corespunde numai $-6+4\sqrt{3}$, sau în grade $x=68°9'23''$. De asemenea corespunde suplimentul acestui unghi, deci $x=111°50'37''$. ● **75.** 1° Să considerăm un plan ce trece prin centrul sferei și e perpendicular pe planul secant a cărui urmă interioară sferei este AB (Fig. 2.75). Notînd $\sphericalangle AOB=2\alpha$, avem $2\pi R^2(1-\cos\alpha)=\pi R^2\sin\alpha$, deci $\alpha=\arccos\dfrac{3}{5}$ și $\alpha=0$. 2°. $\dfrac{1}{3}\pi R^3\sin^2\alpha\cos\alpha=\dfrac{\pi R^3}{3}(1-\cos\alpha)^2(2+\cos\alpha)$. Se găsește $\cos\alpha=1$, $\cos\alpha=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$; pentru ultimele două, nu convine decît soluția

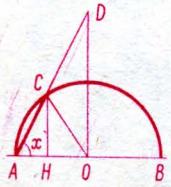


Fig. 2.73

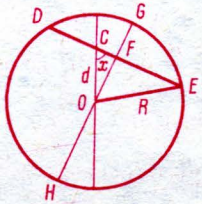


Fig. 2.74

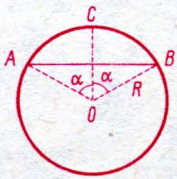


Fig. 2.75

pozitivă. ● **76.** Înălțimea conurilor este $i = g\cos\alpha$ (Fig. 2.76). Pentru raza r a cercului de secțiune al celor două conuri, trebuie să avem $r = x\,\mathrm{tg}\,\alpha = y\,\mathrm{tg}\,\beta = (i-x)\,\mathrm{tg}\,\beta$, deci

$$x = \frac{g\cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}{\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta},\quad r = \frac{g\cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}{\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta},$$

așa că volumul căutat este

$$V = \frac{1}{3}\,\frac{g^3\cos^3\alpha\,\mathrm{tg}^2\alpha\,\mathrm{tg}^2\beta}{(\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta)^2}.$$

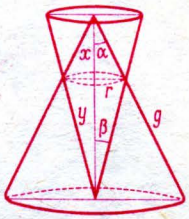


Fig. 2.76

● **77.** ● **78.** Diagonala cubului este $2R$. Dacă latura lui este a, avem $a = \frac{2R}{\sqrt{3}}$. Înălțimea fiecărei piramide este $R\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$. Volumul poliedrului este $\frac{8R^3(6+\sqrt{3})}{27}$ și raportul lui față de volumul sferei este $\frac{2(6+\sqrt{3})}{9\pi}$. ● **79.** Latura pătratului înscris în cercul de bază al emisferei este $R\sqrt{2}$ și înălțimea fiecărui sector sferic este $h = \frac{(2-\sqrt{2})R}{2}$. Volumul căutat este $V = \frac{\pi R^3}{6}5\sqrt{2}$.

● **80.** Fie pana cu baza $ABCD$ și muchia opusă ei EF (Fig. 2.80). Avem

$$FH = \frac{a-c}{2},\quad BH^2 = \frac{4d^2-a^2-c^2+2ac}{4}.$$

Rezultă apoi aria bazei prismei inițiale

$$S = \frac{b}{8}\sqrt{4d^2-a^2-b^2-c^2+2ac}$$

și volumul căutat este

$$V = \left[a-\frac{2}{3}(a-c)\right]\cdot S = \frac{b(a+2c)}{12}\sqrt{4d^2-a^2-b^2-c^2+2ac}.$$

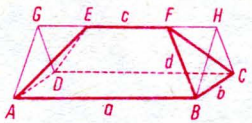


Fig. 2.80

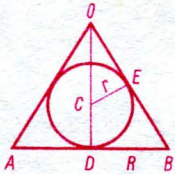


Fig. 2.81

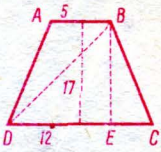


Fig. 2.82

● **81.** Să notăm cu R și h raza cercului de bază și înălțimea conului, iar cu r raza sferei. Din asemănarea triunghiurilor OBD și OCE (Fig. 2.81) și ținînd seama că $OA^2=R^2+h^2$, avem $hR-rR=r\sqrt{R^2+h^2}$. Înmulțind această relație cu $\frac{\pi R}{3}$, ea exprimă tocmai proprietatea din enunț.

● **82.** Fie $ABCD$ trapezul isoscel obținut intersectînd trunchiul de con cu un plan care trece prin centrele celor două baze (Fig. 2.82). Prin același plan secțiunea prin sferă este cercul circumscris trapezului precedent, deci cel circumscris triunghiului BCD. Laturile acestuia sînt $CD=24$ cm, $BC=13\sqrt{2}$ cm, $BD=17\sqrt{2}$ cm și aria $S=12\cdot 17$ cm^2. Raza cercului circumscris triunghiului, deci și a sferei este $R=13$ cm.

● **83.** Fie $ABCD$ baza mare și $EFGH$ baza mică a trunchiului de piramidă dreaptă (Fig. 2.83). Proiecția vîrfului E pe baza mare este M, iar pe latura AB este N. Înălțimea, atît a trunchiului de piramidă ca și a trunchiului de con, este $h=EM$. Ariile bazelor trunchiului de piramidă B, b și a porțiunii din trunchiul de con B_1, b_1 sînt $B=3{,}4\times 2{,}1=7{,}14$ m^2, $b=3\times 1{,}8=5{,}40$ m^2, $B_1=\frac{\pi\, 1{,}05^2}{2}=1{,}73$ m^2, $b_1=\frac{\pi\, 0{,}9^2}{2}=1{,}27$ m^2. Avem apoi

$$AN=\frac{1}{2}\ (2{,}1-1{,}8)=0{,}15\text{ m},\quad NM=\frac{1}{2}\ (3{,}4-3)=0{,}2\text{ m},\quad EN^2=$$
$$=AE^2-AN^2,\quad h^2=EM^2=EN^2-NM^2=AE^2-AN^2-MN^2=12{,}8975\text{ m}^2,$$

deci $h=3{,}59$ m.

Volumele celor două trunchiuri sînt

$$V_1=\frac{3{,}59}{3}\ (7{,}14+5{,}4+\sqrt{7{,}14\times 5{,}4})=24{,}44\text{ m}^3,$$

$$V_2=\frac{3{,}59}{3}\ (1{,}73+1{,}27+\sqrt{1{,}73\times 1{,}27})=5{,}35\text{ m}^3,$$

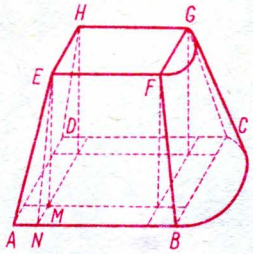


Fig. 2.83

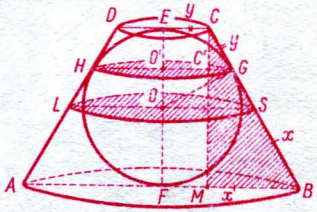


Fig. 2.84

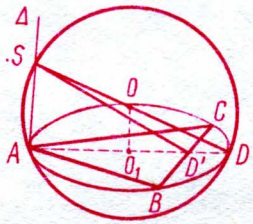


Fig. 2.85

așa că volumul total al pilei este

$$V = V_1 + V_2 = 29{,}79 \text{ m}^3,$$

● **84.** 1) $AB = 136$ cm; $CD = 34$ cm; $BC = AD = 85$ cm. 2) $A = 12138\pi$ cm^2; 3) $A = 1806{,}25\pi$ cm^2; 4) $A = 739{,}84\pi$ cm^2 (Fig. 2.84). ● **85.** 1) Centrul O al sferei se află la intersecția mediatoarelor catetelor triunghiului dreptunghic SAD ($A = 90°$, D punctul diametral opus lui A în cercul circumscris triunghiului ABC) și cum cateta AD rămîne fixă locul geometric al centrului O este o paralelă la Δ dusă prin mijlocul lui BC. 2) AD fiind diametrul cercului circumscris triunghiului ABC avem

$$AD' = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - a^2}, \text{ unde } D' = BC \cap AD$$

$$AD \cdot AD' = AB^2, \text{ deci } AD = \frac{2b^2}{\sqrt{4b^2 - a^2}}$$

$$SD^2 = x^2 + \frac{4b^4}{4b^2 - a^2}$$

$$r = \frac{SD}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2(4b^2 - a^2) + b^4}{4b^2 - a^2}}.$$

3) $SB = \sqrt{b^2 + x^2} = SC$, $BC = a$

$$SD' = \sqrt{x^2 + b^2 - \frac{a^2}{4}}$$

$$R = \frac{b^2 + x^2}{2\sqrt{b^2 + x^2 - \frac{a^2}{4}}}$$

● **86.** $OA = O'B = R$ (Fig. 2.86 *a*). $OO' = R\sqrt{2}$, α = constant, $\Delta AOB'$ isoscel deci $AB' = 2R \sin\frac{\alpha}{2}$, $(AB, OO') = \beta$. a) $\operatorname{tg}\beta = \frac{AB'}{BB'} = \frac{2R\sin\frac{\alpha}{2}}{R\sqrt{2}} = \sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}$ deci β constant. b) Fie M mijlocul lui AB, $MM' = \frac{1}{2}AB' = R\sin\frac{\alpha}{2}$ și C mijlocul lui OO'. $MM'' \parallel BB'$, $M''A = M''B'$

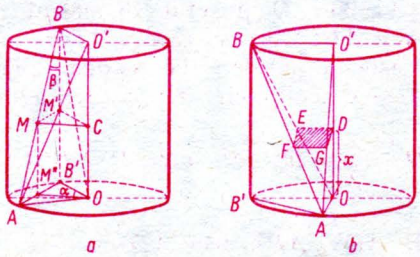


Fig. 2.86

deci $MC=M''O=R\cos\frac{\alpha}{2}$. $MC=R\cos\frac{\alpha}{2}=$ constant deci M descrie un cerc de rază $R\cos\frac{\alpha}{2}$. În cazul $R\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{R}{2}$ sau $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$ deducem $\frac{\alpha}{2}=60°$ și $\alpha=120°$. 2°. $\alpha=90°$ (Fig. 2.86 *b*). a) Fețele OAO', OBO', OAB sînt evident triunghiuri dreptunghice. Să arătăm că și fața ABO' este triunghi dreptunghic.

$$BO'=R,\ AO'=\sqrt{R^2+2R^2}=R\sqrt{3}$$

$$AB=\sqrt{AB'^2+B'B^2}=\sqrt{2R^2+2R^2}=2R$$

$$BO'^2+AO'^2=R^2+3R^2=4R^2=AB^2 \text{ deci}$$

triunghiul ABO' dreptunghic cu $\widehat{BO'A}=90°$. Aria tetraedrului

$$A=A_{AOO'}+A_{OBO'}+A_{ABO'}+A_{AOB}=\frac{1}{2}R\cdot R\sqrt{2}+\frac{1}{2}R\cdot R\sqrt{2}+$$

$$+\frac{1}{2}\cdot R\cdot R\sqrt{3}+\frac{1}{2}\cdot R\cdot R\sqrt{3}=\frac{R^2}{2}(2\sqrt{2}+2\sqrt{3})=R^2(\sqrt{2}+\sqrt{3}).$$

b) $DG\parallel OA$,

$$\frac{DG}{AO}=\frac{O'D}{O'O} \text{ sau } \frac{DG}{R}=\frac{R\sqrt{2}-x}{R\sqrt{2}} \text{ deci } DG=R-\frac{x}{\sqrt{2}},$$

$ED\parallel BO'$

$$\frac{ED}{BO'}=\frac{x}{R\sqrt{2}} \text{ sau } \frac{ED}{R}=\frac{x}{R\sqrt{2}} \text{ deci } ED=\frac{x}{\sqrt{2}},$$

$$OB=AO'=R\sqrt{3},$$

$$\frac{EO}{OB}=\frac{x}{OO'} \text{ sau } \frac{EO}{R\sqrt{3}}=\frac{x}{R\sqrt{2}} \text{ și } EO=\frac{x\sqrt{3}}{\sqrt{2}},$$

$$\frac{FE}{AO}=\frac{BE}{BO} \text{ sau } \frac{FE}{R}=\frac{R\sqrt{3}-\frac{x\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}{R\sqrt{3}} \text{ și } FE=R-\frac{x}{\sqrt{2}},$$

$$\frac{O'G}{O'A}=\frac{O'D}{OO'} \text{ sau } \frac{O'G}{R\sqrt{3}}=\frac{R\sqrt{2}-x}{R\sqrt{2}} \text{ și } O'G=R\sqrt{3}-\frac{x\sqrt{3}}{\sqrt{2}},$$

$$AG=R\sqrt{3}-\left(R\sqrt{3}-\frac{x\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)=\frac{x\sqrt{3}}{\sqrt{2}},$$

$$\frac{FG}{BO'}=\frac{AG}{AO'} \text{ sau } \frac{FG}{R}=\frac{\frac{x\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}{R\sqrt{3}} \text{ deci } FG=\frac{x}{\sqrt{2}}.$$

Patrulaterul $DEFG$ este un dreptunghi cu dimensiunile de $\frac{x}{\sqrt{2}}$ și $R-\frac{x}{\sqrt{2}}$. Avem

$$S=\frac{x}{\sqrt{2}}\left(R-\frac{x}{\sqrt{2}}\right)=\frac{x}{2}(R\sqrt{2}-x).$$

● **87.** 1° Din triunghiurile asemenea ADC și AON deducem (Fig. 2.87) $ON=\frac{a(h-R)}{h}$ și $s_1=\pi ON^2=\pi\frac{a^2(h-R)^2}{h^2}$; $s_2=\pi R^2$. Din condiția $s_1=2\cdot s_2$ avem, folosind și asemănarea triunghiurilor ADC și AOT, $h=R(1+\sqrt{2})$ și $a=R(1+\sqrt{2})$. 2° Din ΔAOT calculăm pe $AO'=\frac{R}{\sqrt{2}}=OO'$ și $V_1=\frac{\pi R^3}{6\sqrt{2}}$ și $V_2=\frac{\pi R^3}{6\sqrt{2}}(4\sqrt{2}-5)$ de unde

$$V_1-V_2=\frac{\pi R^3(3-2\sqrt{2})}{3\sqrt{2}}=\frac{\pi R^3(3\sqrt{2}-4)}{6}.$$

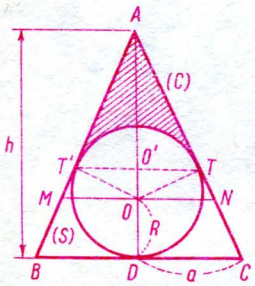


Fig. 2.87

Capitolul III

TRIGONOMETRIE

● **1.** $\cos(\alpha+\beta)=-\frac{13}{85}$. ● **2.** Notăm $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $E=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$. ● **3.** $F=\operatorname{ctg} 3x$. ● **4.** $F=4\cos^2 2x-1$. ● **5.** $F=\operatorname{tg} 3x$. ● **6.** Se înlocuiesc a, b, c, din teorema sinusului în funcție de R și unghiurile A, B, C și se obține

$$E=\frac{\sin 2A+\sin 2B-\sin 2C}{\sin 2A-\sin 2B+\sin 2C}.$$

Se transformă apoi în produs atît numărătorul cît și numitorul, știind că $A+B+C=\pi$ și se obține $E=\operatorname{tg} C\cdot\operatorname{ctg} B$. ● **7.** $E=4\sin\frac{5\pi}{48}\cdot\cos\frac{\pi}{48}\cdot\cos\frac{\pi}{12}$. ● **8.** Dezvoltînd expresiile găsim pentru cele două expresii valorile $\sin^2 a$ și $\frac{3}{2}$. ● **9.** Se transformă $\cos 5x\cos x$ în sumă, se înlocuiește $E(x)$ în expresia lui $f(x)$, se descompune în factori, se simplifică cu $2\cos^2 2x+m$ și se obține $f(x)=2\cos 2x$. ● **10.** Notăm $\sqrt{\frac{1}{2}}=\cos\frac{\pi}{4}$ de unde obținem $\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right)}=\cos\frac{\pi}{8}$ deoarece $1+\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha$ și $\cos\frac{\pi}{8}>0$. În mod asemănător vom avea și

$$\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\pi}{8}\right)}=\cos\frac{\pi}{16}$$

și din aproape în aproape vom obține $A=\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$ ● **11.** Notăm

unghiurile triunghiului EBI cu: $E=\alpha_1$ și $B=\alpha_2$. Avem $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$. Cum $\operatorname{tg}\alpha_1=\frac{1}{2}$ și $\operatorname{tg}\alpha_2=\frac{1}{3}$ rezultă că $\operatorname{tg}\alpha=1$ și deci $\alpha=45°$.

● **12.** Din formula $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$ deducem

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Dacă luăm $\alpha=\frac{\pi}{6}$ și în fața radicalului semnul $+$, deoarece $\frac{\alpha}{2}<90°$, obținem

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}$$

și de aci

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{24}=\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2.$$

● **13.** Notăm $\alpha_1=\widehat{AIB_1}$ și $\alpha_2=\widehat{CIB_1}$. Din relațiile: $\dfrac{\sin\alpha_1}{AB_1}=\dfrac{\sin A}{BB_1}$ și $\dfrac{\sin\alpha_2}{CB_1}=\dfrac{\sin C}{BB_1}$ obținem $\dfrac{\sin\alpha_1}{\sin A}=\dfrac{\sin\alpha_2}{\sin C}$, $(AB_1=CB_1)$ și $\dfrac{\sin\alpha_1-\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1+\sin\alpha_2}=\dfrac{\sin A-\sin C}{\sin A+\sin C}$ sau $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha_1-\alpha_2}{2}=\operatorname{tg}30°\cdot\operatorname{tg}^2 15°$, cum $\alpha_1=15°+\alpha$ și $\alpha_2=15°-\alpha$ vom avea $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}30°\cdot\dfrac{1-\cos 30°}{1+\cos 30°}=\dfrac{(7-4\sqrt{3})\sqrt{3}}{3}$, deci

$$\alpha=\operatorname{arc\,tg}\frac{(7-4\sqrt{3})\sqrt{3}}{3}.$$

● **14.** 1° Se calculează unghiurile în funcție de laturi și se obține: $A=60°$; $B=45°$ și $C=75°$. 2° Se folosește triunghiul AEC. 3° Notăm cu E, G, D picioarele înălțimilor coborîte din A, B, C și cu F piciorul bisectoarei interioare a unghiului A. Din triunghiul ADC se calculează $AD=\sqrt{2}$ și apoi $CD=\sqrt{6}$. Din triunghiul dreptunghic isoscel AEB se calculează $AE=EB=\sqrt{3}+1$, se aplică teorema sinusului în tri-

unghiul BCG și se află $BG=\frac{1}{2}(3\sqrt{2}+\sqrt{6})$ și cu ajutorul formulei $AF=\frac{2}{b+c}\sqrt{bcp\,(p-a)}$ se deduce $AF=2\sqrt{2}$. ● **15.** Trebuie să avem

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}3\alpha}=\frac{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}{3-\operatorname{tg}^2\alpha}=n \text{ (natural)},$$

deci

$$\operatorname{tg}^2\alpha=3+\frac{8}{n-3}.$$

Cum și $\operatorname{tg}^2\alpha$ trebuie să fie număr natural, rezultă că n poate fi 4, 5, 7 sau 11, iar pentru $\operatorname{tg}^2\alpha$ numerele 11, 7, 5 sau 4. Nu corespunde decît ultimul, singurul pătrat perfect, deci $\operatorname{tg}\alpha=2$. ● **16.** $\operatorname{tg}(\alpha+2\beta)=1$, deci $\alpha+2\beta=\frac{\pi}{4}$ ● **17.** Notînd

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{a-\sqrt{-x^2+2bx+a^2}}{x}=A;\ \operatorname{arc\,tg}\frac{a+\sqrt{-x^2+2bx+a^2}}{x}=B,$$

avem $\operatorname{tg}y=\operatorname{tg}(A+B)=\frac{a}{b}$. Relația are loc dacă $-x^2+2bx+a^2\geqslant 0$.

● **18.** 1° $C+iS$ este o progresie geometrică în care primul termen este 1 și rația $q=\cos x+i\sin x$. Numărul termenilor este $(n+1)$. 2° Dacă $q=1$ deci dacă $x=2k\pi$, $C=n+1$, $S=0$. Dacă $q\neq 1$ aplicăm formula sumei termenilor unei progresii geometrice și vom obține:

$$C+iS=\frac{\sin(n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\left(\cos n\frac{x}{2}+i\sin n\frac{x}{2}\right).$$

De aici

$$C=\frac{\sin(n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\cos n\frac{x}{2} \text{ și } S=\frac{\sin(n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\sin n\frac{x}{2}.$$

● **19.** $OA_1=a$, $OB_1=a\cos\theta$, $OC_1=a\cos\theta\sin\theta$, $OD_1=a\cos\theta\sin^2\theta$, $OA_2=a\cos^2\theta\sin^2\theta$, ..., $OA_n=a\cos^{2n-2}\theta\sin^{2n-2}\theta$, OA_1, OA_2, ..., OA_n formează o progresie geometrică cu rația $\cos^2\theta\sin^2\theta$

$$S=OA_1+OA_2+\ldots+OA_n=\frac{a(1-\cos^{2n}\theta\sin^{2n}\theta)}{1-\cos^2\theta\sin^2\theta}$$

cînd $n\to\infty$, $S=\dfrac{a}{1-\cos^2\theta\sin^2\theta}$. ● **20.** $\cos\dfrac{\pi}{15}\cdot\cos\dfrac{2\pi}{15}\cdot\cos\dfrac{4\pi}{15}=$

$$=\frac{\sin 2^3\cdot\dfrac{\pi}{15}}{2^3\sin\dfrac{\pi}{15}}=\frac{\sin\dfrac{8\pi}{15}}{2^3\sin\dfrac{\pi}{15}}=\frac{\sin\dfrac{7\pi}{15}}{2^3\sin\dfrac{\pi}{15}},\ \text{deoarece}\ \frac{8\pi}{15}+\frac{7\pi}{15}=\pi,$$

$\cos\dfrac{3\pi}{15}\cdot\cos\dfrac{6\pi}{15}=\dfrac{\sin 2^2\dfrac{3\pi}{15}}{2^2\sin\dfrac{3\pi}{15}}=\dfrac{1}{2^2}$, deoarece $\dfrac{12\pi}{15}$ și $\dfrac{3\pi}{15}$ sînt arce suplimentare, deci $\cos\dfrac{\pi}{15}\cdot\cos\dfrac{3\pi}{15}\ldots\cos\dfrac{7\pi}{15}=\dfrac{1}{2^5}\dfrac{\sin\dfrac{7\pi}{15}}{\sin\dfrac{\pi}{15}}\cos\dfrac{5\pi}{15}\cos\dfrac{7\pi}{15}=\dfrac{1}{2^6}\cos\dfrac{\pi}{3}$, deoarece

$\sin\dfrac{7\pi}{15}\cos\dfrac{7\pi}{15}=\dfrac{\sin\dfrac{14\pi}{15}}{2}=\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{15}}{2}$ și cum $\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$, $\prod\limits_{k=1}^{k=7}\cos k\dfrac{\pi}{15}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^7$. ● **21.**

Dacă $\alpha=m\pi$ atunci $\prod\limits_{k=0}^{n}\cos 2^k\alpha=\pm1$ după cum m este par sau impar. Dacă $\alpha\neq m\pi$ înmulțim și împărțim cu $\sin\alpha$ și înlocuim $\sin\alpha\cos\alpha=$ $=\dfrac{1}{2}\sin 2\alpha$. ● **22.** Cum $\dfrac{1}{k^2}<\operatorname{tg}\dfrac{1}{k^2}$ rezultă $\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{k^2}<\dfrac{1}{k^2}$ și $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{k^2}=$

$$=\operatorname{arc\,tg}1+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{4}+\sum_{k=3}^{\infty}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{k^2}<\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}+\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{k^2}<\frac{\pi+1}{4}+\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{k(k-1)}=$$

$$=\frac{\pi+1}{4}+\sum_{k=3}^{\infty}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)=\frac{\pi+3}{4}<\frac{\pi}{2}.$$ ● **23.** În produsul PQ grupînd produsele de forma $\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{1}{2}\sin 2\alpha$, avem

$$PQ=\frac{1}{2^n}\sin\frac{2\pi}{2n+1}\sin\frac{4\pi}{2n+1}\ldots\sin\frac{2n\pi}{2n+1}.$$

Lăsînd primii $\frac{n}{2}$, respectiv $\frac{n+1}{2}$, factori neschimbaţi (după cum n este par sau impar) şi înlocuind arcele ultimilor factori cu suplimentele lor, obţinem

$$PQ=\frac{1}{2^n}\cdot Q \quad \text{de unde} \quad (\text{cum } Q\neq 0)\Rightarrow P=\frac{1}{2^n}.$$

Aplicaţii:

$$\cos\frac{\pi}{5}\cdot\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{4}$$

$$\cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{8}$$

$$\cos\frac{\pi}{9}\cdot\cos\frac{2\pi}{9}\cdot\cos\frac{3\pi}{9}\cdot\cos\frac{4\pi}{9}=\frac{1}{16}\ \text{etc.}$$

● **24.** Se aplică metoda inducţiei complete. ● **25.** Se notează cele trei arce presupuse ascuţite, cu α, β, γ şi se calculează $\sin(\alpha+\beta+\gamma)$.
● **26.** Partea dreaptă a identităţii se poate scrie succesiv

$$E=-\frac{\left(a+b\ \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2^n}\right)\left(\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2^{n-1}}\right)-\left(a+b\ \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2^{n-1}}\right)\left(\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2^n}\right)}{\cos\beta\left(a\cos\beta-b\sin\beta\right)\left(\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2^n}\right)\left(\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2^{n-1}}\right)}=$$

$$=\frac{a\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2^{n-1}}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2^n}\right)-b\operatorname{tg}\beta\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2^{n-1}}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2^n}\right)}{\cos^2\beta\left(a-b\operatorname{tg}\beta\right)\left(\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2^n}\right)\left(\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2^{n-1}}\right)}=$$

$$=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2^{n-1}}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2^n}}{\cos^2\beta\left(\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2^{n-1}}\right)\left(\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2^n}\right)}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2^n}}{\sin\left(\beta+\frac{\alpha}{2^n}\right)\sin\left(\beta+\frac{\alpha}{2^{n-1}}\right)}.$$

● **27.** a) Înmulţim şi împărţim expresia cu $2\sin\frac{\pi}{7}$ şi apoi transformăm

produsele în sume. b) Ridicăm prima egalitate la pătrat și înlocuim $\cos^2 a = 1 - \sin^2 a$

$$\sin^2 \frac{2\pi}{7} + \sin^2 \frac{4\pi}{7} + \sin^2 \frac{6\pi}{7} = 3 - \frac{1}{4} +$$

$$+ 2\left[\left(\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7}\right)\cos \frac{6\pi}{7} + \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7}\right].$$

Adunînd la fiecare membru al egalității

$$-2\left(\sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7}\right)\sin \frac{6\pi}{7} + 2 \sin \frac{2\pi}{7} \sin \frac{4\pi}{7}$$

obținem

$$\left(\sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} - \sin \frac{6\pi}{7}\right)^2 = \frac{11}{4} + 2\left[\cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7} - \sin \frac{2\pi}{7} \sin \frac{6\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \cos \frac{6\pi}{7} - \sin \frac{4\pi}{7} \sin \frac{6\pi}{7} + \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} + \sin \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7}\right] = \frac{11}{4} + 2\left(\cos \frac{2\pi}{7} + \right.$$

$$\left. + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}\right) = \frac{11}{4} + 2\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{4},$$

deci $\sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} + \sin \frac{6\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{2}$ deoarece este pozitiv. ● **28.** Se transformă produsele în sume, se înlocuiesc $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$; $\cos \frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ și $\cos \frac{3\pi}{5} = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$ și se obține 1. ● **29.** Considerăm determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sin a & \sin a & \cos a \\ \sin b & \sin b & \cos b \\ \sin c & \sin c & \cos c \end{vmatrix}$$

care avînd două coloane identice este nul. Dacă îl dezvoltăm după elementele coloanei I obținem

$$\Delta = \sin a \begin{vmatrix} \sin b & \cos b \\ \sin c & \cos c \end{vmatrix} - \sin b \begin{vmatrix} \sin a & \cos a \\ \sin c & \cos c \end{vmatrix} + \sin c \begin{vmatrix} \sin a & \cos a \\ \sin b & \cos b \end{vmatrix} =$$

$= \sin a \cdot \sin (b - c) + \sin b \cdot \sin (c - a) + \sin c \cdot \sin (a - b)$ tocmai expresia dată. ● **30.** Transformăm în produse de sinusuri; se exprimă

în funcție de $\sin\frac{\pi}{10}$ care se înlocuiește cu $\frac{1}{4}\left(\sqrt{5}-1\right)$ și se obține $\frac{1}{2}$. ● **31.** Se notează: $\operatorname{arc\,tg}(3+\sqrt{7})=a$, $\operatorname{arc\,tg}(3-\sqrt{7})=b$, $\operatorname{arc\,tg}(2+\sqrt{2})=c$, $\operatorname{arc\,tg}(2-\sqrt{2})=d$ și $\operatorname{arc\,tg}\frac{10}{23}=e$, relația devine $a+b+c+d=\pi+e$. Se aplică funcția tangentă și se obține în ambii membri ai egalității $\frac{10}{23}$.

● **32.** Notăm $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5}=u$ și $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{239}=v$ (1) și obținem $4u-v=\frac{\pi}{4}$. Aplicăm funcția tg acestei egalități și obținem

$$\frac{\operatorname{tg}4u-\operatorname{tg}v}{1+\operatorname{tg}4u\cdot\operatorname{tg}v}=1.$$

Exprimăm $\operatorname{tg}4u$ în funcție de $\operatorname{tg}u$ și înlocuind cu valorile lor din (1) obținem valoarea 1. ● **33.** ● **34.** Se transformă sumele de puteri de sin și cos și se ajunge la expresia: $E=1+A+B+C-\sin^2 x\cos^2 x(3A+4B+5C+2)+\sin^4 x\cos^4 x(2B+5C)$. Notînd $\sin^2 2x=u$ și $E=k$, se ajunge la un polinom care trebuie să fie identic nul și de aici la sistemul:

$$\begin{cases} 1+A+B+C=k \\ 3A+4B+5C+2=0 \\ 2B+5C=0 \end{cases}$$

de unde obținem soluția: $A=10k-4$, $B=-15k+5$; $C=6k-2$, k arbitrar. ● **35.** Se exprimă partea întîia cu ajutorul unghiului $\frac{\pi}{9}$ și se ține seama că avem

$$\cos\frac{3\pi}{9}=4\cos\frac{3\pi}{9}-3\cos\frac{\pi}{9}=\frac{1}{2}.$$

● **36.** Cum $\cos^2\alpha\geqslant 0$ și $\cos 2\alpha\geqslant 0$ pentru orice $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$, vom putea transforma cei doi radicali dubli după formula:

$$\sqrt{\cos^2\alpha\pm\sqrt{\cos 2\alpha}}=\sqrt{\frac{\cos^2\alpha+\sqrt{\cos^4\alpha-\cos 2\alpha}}{2}}\pm$$
$$\pm\sqrt{\frac{\cos^2\alpha-\sqrt{\cos^4\alpha-\cos 2\alpha}}{2}}$$

și făcînd calculele obținem $\sqrt{2}$. ● **37.** Cum $\frac{\pi}{20}$ și $\frac{9\pi}{20}$ precum și $\frac{3\pi}{20}$ și $\frac{7\pi}{20}$ sînt perechi de unghiuri complementare, avem $\operatorname{tg}\frac{9\pi}{20}=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{20}=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{20}}$ și $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{20}=\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{20}=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{3\pi}{20}}$. Dar $\operatorname{tg}\frac{\pi}{20}+\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{20}}=\frac{2}{\sin\frac{\pi}{10}}$ și $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{20}+\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{3\pi}{20}}=\frac{2}{\sin\frac{3\pi}{10}}$ deci $\operatorname{tg}\frac{\pi}{20}+\operatorname{tg}\frac{9\pi}{20}-\left(\operatorname{tg}\frac{3\pi}{20}+\operatorname{tg}\frac{7\pi}{20}\right)=\frac{2}{\sin\frac{\pi}{10}}-\frac{2}{\sin\frac{3\pi}{10}}=$

$$=2\cdot\frac{\sin\frac{3\pi}{10}-\sin\frac{\pi}{10}}{\sin\frac{\pi}{10}\cdot\sin\frac{3\pi}{10}}=4\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{10}\cdot\cos\frac{2\pi}{10}}{\sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{3\pi}{10}}=4,$$

deoarece $\cos\frac{2\pi}{10}=\sin\frac{3\pi}{10}$. ● **38.** 1° Se folosește formula: $\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$ și avem $\sin^4\frac{\pi}{8}+\sin^4\frac{3\pi}{8}+\sin^4\frac{5\pi}{8}+\sin^4\frac{7\pi}{8}=\frac{3}{2}$. Pentru identitatea a doua se folosește formula analoagă, $\cos^4\alpha=\left(\frac{1+\cos 2\alpha}{2}\right)^2$ etc. ● **39.** 1° Se transformă produsele în sume și se obține:

$$\sin\frac{\pi}{9}\cdot\sin\frac{2\pi}{9}\cdot\sin\frac{3\pi}{9}\cdot\sin\frac{4\pi}{9}=\frac{1}{4}\left(\cos\frac{\pi}{9}-\cos\frac{3\pi}{9}\right)\left(\cos\frac{\pi}{9}-\cos\frac{7\pi}{9}\right)=\frac{1}{8}\left[1-\cos\left(\pi-\frac{\pi}{9}\right)+\cos\frac{2\pi}{3}+\cos\left(\pi+\frac{\pi}{9}\right)\right]=\frac{3}{16}.$$

2° Se procedează la fel obținîndu-se rezultatul $\frac{1}{16}$, sau se utilizează ex. 23. ● **40.** Se descompun ca diferențe de pătrate și se obțin expresii identice în ambii membri ai egalității. ● **41.** Se aplică metoda coeficienților nedeterminați și se obține $Q(x)=x^4+2a\cos\alpha(4\cos^2\alpha-3)x^3+12a^2\cos^2\alpha\,(1-\cos^2\alpha)x^2+2a^3\cos^3\alpha\,(3\cos^2\alpha-4)x-a^4\cos^6\alpha$, deci $P(x)\equiv(x-a\cos^3\alpha)^2\cdot Q(x)$. Pentru a arăta că $P(x)$ e divizibil cu $(x-a\cos^3\alpha)^2$ se mai poate arăta că $P(a\cos^3\alpha)=0$ și $P'(a\cos^3\alpha)=0$.

● **42.** Cum avem $\frac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}=\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta$ și cele analoage, egalitatea devine $\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{ctg}\gamma\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$. Avem suma $\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma=\operatorname{ctg}\beta(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\gamma)=\operatorname{ctg}[\pi-(\alpha+\gamma)]\cdot(\operatorname{ctg}\alpha+$ $+\operatorname{ctg}\gamma)=1-\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\gamma$. ● **43.** Se știe că $\operatorname{tg}\alpha>\alpha$ dacă $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ astfel

$$\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha\equiv\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}+\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{4\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^4\frac{\alpha}{2}}>4\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}>4\cdot\frac{\alpha}{2}=2\alpha.$$ Deci,

$\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha>2\alpha$, $\sin\beta+\operatorname{tg}\beta>2\beta$, $\sin\gamma+\operatorname{tg}\gamma>2\gamma$, deci $\sin\alpha+\sin\beta+$ $+\sin\gamma+\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma>2(\alpha+\beta+\gamma)=2\pi$. ● **44.** *Demonstrația 1.* Se înmulțește peste tot cu $\sin\frac{\beta}{2}$ și termenii obținuți se scriu ca diferență de sinusuri. *Demonstrația 2.* Notăm $C=\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)+\ldots+\cos(\alpha+$ $+n\beta)$, $S=\sin\alpha+\sin(\alpha+\beta)+\ldots+\sin(\alpha+n\beta)$.
Ținînd seama de formula lui Euler, $e^{iz}=\cos z+i\sin z$, avem

$$C+iS=e^{i\alpha}(1+e^{i\beta}+\ldots+e^{in\beta})=e^{i\alpha}\frac{1-e^{i(n+1)\beta}}{1-e^{i\beta}}.$$

Revenind la sinus și cosinus și separînd partea reală și imaginară avem

$$C=\frac{\sin\frac{n+1}{2}\beta\cos\left(\alpha+\frac{n\beta}{2}\right)}{\sin\frac{\beta}{2}}$$

$$S=\frac{\sin\frac{n+1}{2}\beta\sin\left(\alpha+\frac{n\beta}{2}\right)}{\sin\frac{\beta}{2}}.$$

● **45.** ● **46.** ● **47.** Pentru ca să avem $\frac{A+Bm}{C+Dm}\equiv\alpha$, α independent de m, coeficienții A și B trebuie să fie proporționali cu C și D, după cum rezultă imediat din identitatea $A+Bm=\alpha C+\alpha Dm$ (Factorul de proporționalitate fiind chiar α). Aici avem

$$E=\frac{2\cos 3x\cos x+8m\sin^2 x\cos^2 x}{\frac{1}{2}\left(\cos 2x-\frac{1}{2}\right)+m\sin^2 x}$$

și se verifică ușor proporționalitatea coeficienților. ● **48.** Ultima egalitate se scrie $\frac{\operatorname{tg}(a+c)+\operatorname{tg} b}{1-\operatorname{tg}(a+c)\operatorname{tg} b}=\frac{n+1}{n-1}\cdot\frac{\operatorname{tg}(a+c)-\operatorname{tg} b}{1+\operatorname{tg}(a+c)\operatorname{tg} b}$. Aducînd la numitor comun și separînd termenii care conțin pe n, avem

$$\frac{\operatorname{tg}(a+c)}{1+\operatorname{tg}^2(a+c)}=n\,\frac{\operatorname{tg} b}{1+\operatorname{tg}^2 b},$$

care se scrie $\sin 2(a+c)=n\sin 2b$. ● **49.** ● **50.** Din egalitatea primului și celui de-al treilea raport și apoi din egalitatea celorlalte două avem

$$\frac{2\cos(x+a)\cos a}{a+c}=\frac{2\cos(x+2a)\cos a}{b+d}.$$

Ori, $\cos(x+a)$ și $\cos(x+2a)$ sînt proporționali cu b și c. ● **51.** Trebuie să avem sau $\sin\left(x+y+\frac{\pi}{2}\right)\geqslant\frac{1}{2}$, sau $\sin\left(x+y+\frac{\pi}{2}\right)\leqslant-\frac{1}{2}$. În primul caz, $x+y+\frac{\pi}{2}$ trebuie să fie în unul din intervalele $\left[\frac{\pi}{6}+2k\pi,\frac{5\pi}{6}+2k\pi\right]$, iar în al doilea caz, în unul din intervalele $\left[\frac{7\pi}{6}+2k\pi,\frac{11\pi}{6}+2k\pi\right]$, $k\in\mathbf{Z}$. Cum $0\leqslant x+y\leqslant 4\pi$, rezultă în primul caz că $x+y$ trebuie să fie în unul din intervalele $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$, $\left[\frac{5\pi}{3},\frac{7\pi}{3}\right]$, $\left[\frac{11\pi}{3},4\pi\right]$, iar în al doilea caz, în unul din intervalele $\left[\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right]$, $\left[\frac{8\pi}{3},\frac{10\pi}{3}\right]$. ● **52.** Deoarece $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}=\sqrt{3}$, avem $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta=1-\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\sqrt{3}}=1-\frac{1}{2\cos\alpha\cos\beta}=$

$$=1-\frac{1}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}=1-\frac{1}{\frac{1}{2}+\cos(\alpha-\beta)}\leqslant 1-\frac{1}{\frac{1}{2}+1}=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}.$$

Egalitatea apare dacă $\alpha=\beta=30^\circ$.

● **53.** Cum $\frac{\operatorname{tg}^2 x-\sin^2 x}{\operatorname{ctg}^2 x-\cos^2 x}=\frac{\operatorname{tg}^2 x(1-\cos^2 x)}{\operatorname{ctg}^2 x(1-\sin^2 x)}=\frac{\operatorname{tg}^2 x\sin^2 x}{\operatorname{ctg}^2 x\cos^2 x}=\operatorname{tg}^6 x$

rezultă $\operatorname{tg}^6 x>1$ dacă $\operatorname{tg} x>1$ sau $\operatorname{tg} x<-1$, $\frac{\pi}{4}+k\pi<x<\frac{\pi}{2}+k\pi$ sau

$\frac{\pi}{2}+k\pi<x<\frac{3\pi}{4}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$. ● **54.** Deoarece $\cos x\cdot\sin 6x-\sin x\cos 6x=\sin 5x$, rezultă $\sin 5x<0$. Inegalitatea este adevărată dacă $\pi+2k\pi<5x<2\pi+2k\pi$ sau $\frac{\pi}{5}(2k+1)<x<\frac{\pi}{5}(2k+2)$, $k\in\mathbf{Z}$. ● **55.** Notăm $y=|\sin x|$ și avem $y^2-\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}y+\frac{\sqrt{6}}{4}<0$. Această inegalitate este adevărată numai dacă $y_1<y<y_2$ și cum $y_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$ și $y_2=\frac{\sqrt{3}}{2}$ vom avea $\frac{\sqrt{2}}{2}<|\sin x|<\frac{\sqrt{3}}{2}$ deci $\frac{\pi}{4}+k\pi<x<\frac{\pi}{3}+k\pi$, sau $\frac{2\pi}{3}+k\pi<x<\frac{3\pi}{4}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$. ● **56.** Inegalitatea devine pe rînd $1-\cos^2x+\cos x+1\geqslant 0$ sau $\cos^2x-\cos x-2\leqslant 0$ sau $(\cos x-2)(\cos x+1)\leqslant 0$. Cum $\cos x-2<0$ pentru $\forall x\in\mathbf{R}$ și $\cos x+1>0$ pentru $\forall x\in R$ cu excepția $x=(2k+1)\pi$ pentru care este zero, inegalitatea va fi adevărată $\forall x\in\mathbf{R}$. ● **57.** Membrul stîng are sens numai dacă $x\neq-\frac{\pi}{4}+k\pi$. Obținem inegalitățile echivalente

$$-1<\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}<1 \text{ sau}$$

$$-1<\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)<1 \quad \text{sau}$$

$$-\frac{\pi}{4}+k\pi<x-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}+k\pi \text{ deci}$$

$$k\pi<x<\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}.$$

● **58.** Cum $\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x=-\frac{2\cos 2x}{\sin 2x}$, $\left(x\neq\frac{k\pi}{2}\right)$ membrul stîng devine egal cu $-\sin 6x$. Inegalitatea se transformă în $\cos 6x+\sin 6x<0$ sau

$2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}-6x\right)<0$. Cum $\sin\frac{\pi}{4}>0$ rezultă $\cos\left(\frac{\pi}{4}-6x\right)<0$ adevărată pentru

$$2k\pi+\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{4}-6x<\frac{3\pi}{2}+2k\pi, \text{ sau}$$

$$\frac{3\pi}{24}+\frac{k_1\pi}{3}<x<\frac{7\pi}{24}+\frac{k\pi}{3},\ k\in\mathbf{Z}\ (k_1=-k-1).$$

● **59.** a) Membrul stîng are sens dacă $\operatorname{tg}^2x\geqslant 3$, aceasta dacă $\operatorname{tg}x\geqslant\sqrt{3}$ sau $\operatorname{tg}x\leqslant-\sqrt{3}$ care ne dau soluțiile:

$$\frac{\pi}{3}+k\pi\leqslant x<\frac{\pi}{2}+k\pi \text{ sau}$$

$$\frac{\pi}{2}+k\pi<x\leqslant\frac{5\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}.$$

În ultimul caz $1+2\operatorname{tg}x\leqslant 1-2\sqrt{3}<0$, deci inegalitatea este verificată pentru toate valorile considerate. În primul caz cei doi membri sînt pozitivi, deci ridicînd la pătrat avem

$$0>4+4\operatorname{tg}x+3\operatorname{tg}^2x,$$

ceea ce este imposibil. Rezultă că soluțiile inecuației sînt $\frac{\pi}{2}<x\leqslant\frac{2\pi}{3}$ și $\frac{3\pi}{2}<x<\frac{5\pi}{3}$. b) $\frac{\pi}{6}<x<\frac{5\pi}{6}$, sau $\frac{7\pi}{6}<x<\frac{11\pi}{6}$. c) Inecuația se scrie $\sin(\sin x+x)>0$, adevărată dacă $0<\sin x+x<\pi$, deci dacă $0<x<\pi$. ● **60.** Notăm $\log_{\sec x}(13{,}25)=y$ deci $(\sec x)^y=13{,}25=12{,}25+1$ dar $\log_{\operatorname{tg}x}12{,}25=y$, deci $(\operatorname{tg}x)^y=12{,}25$, rezultă că $(\sec x)^y=(\operatorname{tg}x)^y+1$ sau $\frac{1}{(\cos x)^y}=\frac{(\sin x)^y}{(\cos x)^y}+1$ sau $(\sin x)^y+(\cos x)^y=1$, dar cum $\sin^2x+\cos^2x=1$, rezultă $y=2$ deci $(\operatorname{tg}x)^2=12{,}25$ sau $\operatorname{tg}x=3{,}5$ de unde $x=\operatorname{arc\,tg}3{,}5+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$. ● **61.** Condițiile de existență: $\cos x>0$, $\cos x\neq 1$, $\frac{1}{2}-\cos x>0$.

$$x\in\left\{\pm\arccos\frac{1}{4}+2k\pi\right\}\cup\left\{\pm\arccos\frac{-1+\sqrt{3}}{2}+2k\pi\right\}_{k\in\mathbf{Z}}.$$

● **62.** Condițiile de existență: $\sin x>0$, $\sin x\neq 1$, $\cos x>0$, $\cos x\neq 1$, sau $x\in\left(2k\pi;\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$, $k\in\mathbf{Z}$. Transformăm în baza 10 și facem substituția

$$\frac{\log\sin x}{\log\cos x}=t.$$

Ecuația în t are soluția $t_1=t_2=2$. Obținem $\cos^2 x=\sin x$ cu singura soluție acceptabilă

$$\sin x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\quad\text{deci}$$

$$x=(-1)^k\arcsin\frac{-1+\sqrt{5}}{2}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}.$$

● **63.** Condițiile de existență sînt: $\operatorname{tg} x>0$, $x\neq k\pi$, $x\neq\pm\frac{\pi}{2}+k\pi$. Ecuația se transformă în $(\sqrt{\operatorname{tg} x}-\sqrt{\operatorname{ctg} x})(\sqrt{\operatorname{tg} x}+\sqrt{\operatorname{ctg} x}+2)=0$. Avem $\sqrt{\operatorname{tg} x}-\sqrt{\operatorname{ctg} x}=0$ cu soluția $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$. Cealaltă ecuație nu are soluții. ● **64.** $x\in\left\{\pm\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}\cup\left\{\pm\frac{\pi}{4}+k\pi\right\}\cup\left\{\pm\frac{\pi}{6}+k\pi\right\}_{k\in\mathbf{Z}}$. ● **65.** Se transformă în baza 10 și ecuația devine:

$$3\left(\frac{\log\sin x}{\log 2}\right)^2+1+2\cdot\frac{\log\sin x}{\log 2}=2.$$

Notînd $\frac{\log\sin x}{\log 2}=y$ obținem ecuația $3y^2+2y-1=0$. Soluția ecuației va fi:

$$x=(-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}_+.$$

● **66.** Se dezvoltă și se înlocuiesc $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}=\sqrt{5-2\sqrt{5}}$ și $\operatorname{tg}\frac{\pi}{10}=\frac{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}$ se obține o ecuație în funcție de $\operatorname{tg} 3x$ care se rezolvă și se obține

$$x\in\left\{\frac{k\pi}{3}\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{5}+k\pi\right\}_{k\in\mathbf{Z}}$$

● **67.** Se calculează $f(x)$ și se obține $f(x)=\cos x+\sin x$ deci $f(-x)=$ $=\cos x-\sin x$. Ecuația devine $\cos x+\sin x+(2+\sqrt{3})(\cos x-\sin x)=0$ sau $\sqrt{3}\cos x-\sin x=0$. Cu soluția $x=\frac{\pi}{3}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$. ● **68.** Cum $\operatorname{tg}\left(3\cdot\frac{\pi}{36}\right)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$ și $\operatorname{tg}3\alpha=\frac{3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$, notînd $\operatorname{tg}\frac{\pi}{36}=t$ avem $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}=$ $=\frac{3t-t^3}{1-3t^2}$. Înlocuind în ecuație pe x cu t și $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}=\frac{3t-t^3}{1-3t^2}$ și făcînd calculele, obținem membrul întîi egal cu zero, deci $x_1=\operatorname{tg}\frac{\pi}{36}$ este rădăcină a ecuației. Se împarte membrul stîng al ecuației

$$x^3-3\left(\frac{3t-t^3}{1-3t^2}\right)x^2-3x+\frac{3t-t^3}{1-3t^2}=0$$

cu $x-t$ și se obține ecuația de gradul II în x

$$(1-3t^2)x^2-8tx+t^2-3=0$$

care ne va da celelalte două rădăcini

$$x_2=\frac{t^2\sqrt{3}+4t+\sqrt{3}}{1-3t^2}\quad\text{și}\quad x_3=-\frac{t^2\sqrt{3}-4t+\sqrt{3}}{1-3t^2}$$

în care înlocuind $t=\operatorname{tg}\frac{\pi}{36}$ obținem

$$x_2=\frac{\sqrt{3}+2\sin\frac{\pi}{18}}{2\cos\frac{\pi}{18}-1}\quad\text{și}\quad x_3=-\frac{\sqrt{3}-2\sin\frac{\pi}{18}}{2\cos\frac{\pi}{18}-1}.$$

● **69.** Se transformă și se obține $1+2^{\operatorname{tg} x}=3\cdot 2^{1-\operatorname{tg} x}$. Se face substituția $2^{\operatorname{tg} x}=t$ și obținem $t^2+t-6=0$ cu soluția acceptabilă $t=2$. Avem deci $\operatorname{tg} x=1$ de unde

$$x\in\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi\right\}_{k\in\mathbf{Z}}.$$

● **70.** Ecuația se mai poate scrie:

$$\frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{2\sin^2 x}}-\left(\frac{1}{2}\right)^{2\sin^2 x}=\frac{1}{2}.$$

Facem susbstituția $\left(\frac{1}{2}\right)^{2\sin^2 x}=u$ și obținem ecuația:

$$2u^2+u-1=0$$

cu soluția acceptabilă $u=\frac{1}{2}$ deci $2\sin^2 x=1$ de unde

$$x=\pm\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}.$$

● **71.** Se explicitează modulul și se obțin ecuațiile:

$$2\operatorname{tg} x=2\sqrt{3},\quad x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$-2\operatorname{tg} x=2\sqrt{3},\quad x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2},\frac{7\pi}{4}\right)$$

cu soluțiile acceptabile

$$x=\frac{\pi}{3}+k\pi \text{ și } x=\frac{2\pi}{3}+k\pi.$$

Soluția va fi deci

$$x\in\left\{\frac{\pi}{3}+k\pi\right\}\cup\left\{\frac{2\pi}{3}+k\pi\right\}_{k\in\mathbf{Z}}.$$

● **72.** $x\in\left\{\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi\right\}\cup\left\{\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi\right\}\cup\left\{\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right\}\cup\left\{\pm\frac{\pi}{4}+2k\pi\right\}\cup$

$\cup\left\{\pm\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right\}_{k\in Z}$. ● **73.** $x\in\left\{\pm\frac{\pi}{4}+k\pi\right\}\cup\left\{\pm\frac{\pi}{12}+k\pi\right\}\cup\left\{\frac{5\pi}{12}+k\pi\right\}_{k\in Z}$.

● **74.** Înlocuind $\sin 6x=2\sin 3x\cos 3x$ și $\cos^2 3x=1-\sin^2 3x$ obținem ecuația $2\sin^4 3x-3\sin^2 3x+1=0$ care se descompune în ecuațiile: $\sin 3x=\pm 1$ și $\sin 3x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ cu soluția

$$x\in\left\{\pm\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}\right\}\cup\left\{\pm\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{3}\right\}_{k\in Z}.$$

● **75.** $$x\in\left\{\frac{k\pi}{6}\right\}\cup\left\{\frac{k\pi}{12}\right\}\cup\left\{\pm\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}\right\}_{k\in Z}.$$

● **76.** Deoarece $2^{\sin^2 x}\geqslant 1\geqslant\sin x$ ($2^\alpha\geqslant 1$ dacă $\alpha\geqslant 0$), avem $2^{\sin^2 x}=\sin x$ dacă și numai dacă egalitățile $2^{\sin^2 x}=1$ și $1=\sin x$ sînt adevărate. Aceasta însă nu se poate realiza deoarece $\sin^2 x=0$ și $\sin x=1$ nu se pot realiza simultan. Deci ecuația nu are soluții. ● **77.** Se împarte cu x^2 și se face substituția $x+\frac{1}{x}=y$. Se obține ecuația în y, $y^2-4y\cos a\cos b+2(\cos 2a+$ $+\cos 2b)=0$ cu rădăcinile: $y_1=2\cos(a-b)$ și $y_2=2\cos(a+b)$. Se obțin apoi ecuațiile: $x^2-2x\cos(a-b)+1=0$ și $x^2-2x\cos(a+b)+1=0$ care ne dau cele 4 rădăcini $x_{1,2}=\cos(a-b)\pm i\sin(a-b)$; $x_{3,4}=\cos(a+b)\pm$ $\pm i\sin(a+b)$. ● **78.** $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+k\pi$, $k\in Z$. ● **79.** $x\in\left\{-\frac{\pi}{72}+\frac{k\pi}{3}\right\}\cup$

$\cup\left\{-\frac{5\pi}{72}+\frac{k\pi}{3}\right\}_{k\in Z}$. ● **80.** Ecuația se poate scrie $\sin x\cos\frac{x}{2}=\left|\cos\frac{x}{2}\right|$ obținem două ecuații $\cos\frac{x}{2}(\sin x-1)=0$ sau $\cos\frac{x}{2}(\sin x+1)=0$ și soluțiile $x=(4k+1)\pi$ sau $x=\pm\frac{\pi}{2}+k\pi$. ● **81.** $x\in\left\{-\frac{\pi}{4}+k\pi\right\}_{k\in Z}\cup\left\{\frac{\pi}{2}+\right.$

$\left.+k\pi\right\}_{\substack{k=2k'+1\\k'\in Z}}\cup\left\{k\pi\right\}_{\substack{k=2k'\\k'\in Z}}$ ● **82.** Notînd $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, avem $(5m-2)t^2-2mt+$ $+m=0$. Avem două soluții, dacă discriminantul este pozitiv, deci dacă

$0 \leqslant m \leqslant \frac{1}{2}$. La fiecare asemenea valoare pentru t, corespunde pentru x o singură valoare cuprinsă între 0° și 360°, căci pentru $\frac{x}{2}$ și $\frac{x}{2}+k\pi$, k întreg, avem pentru x: x și $x+2k\pi$. Pentru $m=0$, avem $t=0$ și $x=0$. Pentru $m=\frac{1}{2}$, rezultă $t=1$, deci $x=\frac{\pi}{2}$. Pentru cazul $m=\frac{1}{4}$, găsim $x_1=\frac{3\pi}{2}$ și $x_2=36°52'11'',6$ $\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1}{3}\right)$. ● **83.** $\alpha \in \left\{\frac{3\pi}{4}+k\pi\right\} \cup \{\pm\pi+4k\pi\} \cup \left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi\right\}_{k\in Z}$. ● **84.** 1° Înlocuim în funcție de $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ și avem

$$(1+a)\frac{2t}{1+t^2}+(1-a)\frac{1-t^2}{1+t^2}+1=0$$

sau, eliminînd numitorul care nu poate fi nul și simplificînd, avem $at^2+2(a+1)t+2-a=0$ sau $t=\frac{-a-1\pm\sqrt{2a^2+1}}{a}$. 2°. Discriminantul $2a^2+1$ este totdeauna pozitiv și deci rădăcinile nu pot fi egale. 3°. Ecuația generală va fi

$$(a+b-1)t^2+2(a+1)t-a+b+1=0 \text{ de unde}$$

$$t=\frac{-a-1\pm\sqrt{2a^2-b^2+2}}{a+b-1}.$$

Rădăcinile sînt egale pentru $b^2=2(a^2+1)$. 4°. În acest caz pentru a avea $a=\sin\theta$ și $b=\cos\theta$ sau invers, trebuie ca $1=\sin^2\theta+\cos^2\theta=a^2+b^2=a^2+2(a^2+1)=3a^2+2$. $3a^2=-1$ caz imposibil, deci nu avem nici un unghi θ care să corespundă acestei condiții. ● **85.** 1° 85°18'54'',1; 175°18'54'',1; 265°18'54'',1; 355°18'54'',1.

2° p sau $q=62°35'37'',3$ p sau $q=132°24'22'',6$

și

q sau $p=47°35'37'',3$ q sau $p=117°24'22'',6$.

● **86.** $\sin 2x=\frac{1}{2}$, $x=(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}$. ● **87.** Cele trei funcții există pentru

$x\in[0,\ 1]$. Notînd $\alpha=\arccos x$, $\beta=\arccos(1-x)$, avem $x=\cos\alpha$, $1-x=\cos\beta$ deci $\cos(\alpha+\beta)=x(1-x)-\sqrt{1-x^2}\sqrt{2x-x^2}$. Trebuie deci $\arccos[x(1-x)-\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{2x-x^2}]=\arccos(-x)$, deci $x(1-x)-\sqrt{1-x^2}\sqrt{2x-x^2}=x$ sau $x(1-x)-\sqrt{1-x^2}\sqrt{2x-x^2}=-x$. Prima se scrie $-x^2-\sqrt{1-x^2}\sqrt{2x-x^2}=0$, deci nu are soluții. Pentru a doua, găsim soluțiile $x=0$ și $x=\frac{1}{2}$. ● **88.** Avem $\operatorname{tg}(\pi\operatorname{tg}x)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\pi\operatorname{ctg}x\right)$, deci $\pi\operatorname{tg}x=\frac{\pi}{2}-\pi\operatorname{ctg}x+k\pi$, de unde $x=\operatorname{arc\,tg}\frac{1+2k\pm\sqrt{(1+2k)^2-16}}{4}+k_1\pi$. Cantitatea de sub radical trebuie să fie pozitivă, deci k întreg trebuie să fie diferit de 0, 1 și -1. ● **89.** Ec. este echivalentă cu sistemele:

$$\text{I}\quad\begin{cases}0\leqslant 1+\sin 2x\leqslant 1\\ 1\leqslant 1-\sin 2x\\ \log_{\frac{1}{3}}(1+\sin 2x)-\log_{\frac{1}{3}}(1-\sin 2x)=1\end{cases}\quad\text{sau}$$

$$\text{II}\quad\begin{cases}1\leqslant 1+\sin 2x\\ 0<1-\sin 2x\leqslant 1\\ \log_{\frac{1}{3}}(1-\sin 2x)-\log_{\frac{1}{3}}(1+\sin 2x)=1\end{cases}\quad\text{sau}$$

$$\text{III}\quad\begin{cases}0<1+\sin 2x\leqslant 1\\ 0<1-\sin 2x\leqslant 1\\ \log_{\frac{1}{3}}(1+\sin 2x)+\log_{\frac{1}{3}}(1-\sin 2x)=1\end{cases}\quad\text{sau}$$

$$\text{IV}\quad\begin{cases}1\leqslant 1+\sin 2x\\ 1\leqslant 1-\sin 2x\\ \log_{\frac{1}{3}}(1+\sin 2x)+\log_{\frac{1}{3}}(1-\sin 2x)=-1\end{cases}$$

Sist. III și IV nu admit soluții iar I și II sînt echivalente cu

$$\begin{cases}-1<\sin 2x\leqslant 0\\ \frac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}=\frac{1}{3}\end{cases}\quad\text{sau}\quad\begin{cases}0\leqslant\sin 2x<1\\ \frac{1-\sin 2x}{1+\sin 2x}=\frac{1}{3}\end{cases}.$$

Deci

$$\sin x=-\frac{1}{2}\quad\text{sau}\quad\sin x=\frac{1}{2}$$

$$x=\pm\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2},\quad k\in\mathbf{Z}$$

● **90.** 1° Dacă $\cos x = \cos y$, deci dacă $x = \pm y + 2k\pi$, oricare dintre ecuații se poate scrie $f(x) = 2\cos^2 x - \frac{1}{m}\cos x - 1 = 0$, care are totdeauna rădăcini reale, dar numai acelea corespund care în valoare absolută sînt subunitare. Cum $f(-1) = \frac{m+1}{m}$ și $f(1) = \frac{m-1}{m}$, pentru ca -1 să fie între rădăcini trebuie ca $m(m+1) < 0$, deci $-1 < m < 0$, iar pentru ca $+1$ să fie între rădăcini trebuie ca $m(m-1) < 0$, deci $0 < m < 1$. Rezultă că -1 și $+1$ nu pot fi simultan între rădăcini, deci nu este posibil ca una dintre rădăcini să fie mai mică decît -1 și alta mai mare decît $+1$. Atunci dacă $-1 < m < 0$, convine numai rădăcina cea mai mare, iar dacă $0 < m < 1$, convine numai rădăcina cea mai mică. Dacă m este exterior intervalului $(-1, 1)$, conform celor de mai sus, rădăcinile pot fi numai într-unul din intervalele $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, +\infty)$. Cum semisuma rădăcinilor este $\frac{1}{4m}$ rezultă că ambele rădăcini se găsesc în $(-1, 1)$, deci corespund problemei. În concluzie, pentru $|m| < 1$ ecuația are numai o rădăcină, iar dacă $|m| \geqslant 1$ ecuația are două rădăcini (pentru $m = -1$, rădăcinile sînt -1 și $\frac{1}{2}$, iar pentru $m = 1$, ele sînt $-\frac{1}{2}$, 1). 2° Scăzînd cele două ecuații ale sistemului avem $\cos x - \cos y = 2m(\cos^2 y - \cos^2 x)$. Pentru ecuația $\cos x - \cos y = 0$ soluțiile au fost găsite mai sus, rămîne să studiem ecuația $-1 = 2m(\cos y + \cos x)$, sau $\varphi(x) \equiv \equiv \cos^2 x + \frac{1}{2m}\cos x + \frac{1-2m^2}{4m^2} = 0$. Ecuația are rădăcini reale numai dacă $|m| \geqslant \sqrt{\frac{3}{8}}$. Cum $\varphi(-1) > 0$, $\varphi(1) > 0$, nici -1 nici $+1$, nu pot fi între rădăcini, deci ambele rădăcini sînt într-unul din intervalele $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, +\infty)$. Pentru ca ele să fie în al doilea interval, semisuma rădăcinilor în valoare absolută trebuie să fie subunitară, deci $|m| > \frac{1}{4}$. Ținînd seama și de condiția de realitate, rezultă că ecuația are două rădăcini dacă $|m| \geqslant \sqrt{\frac{3}{8}}$ și nici una în caz contrar. ● **91.** Se obține sistemul echivalent

$$\begin{cases} \cos^2 x + \cos^2 y = 1 \\ 2\cos x \cos x = 1 \end{cases}$$

cu perechile de soluții

$$\begin{cases} \cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}, & x=\pm\dfrac{\pi}{4}+2k\pi \\ \cos y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}, & y=\pm\dfrac{\pi}{4}+2k\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, & x=\pm\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi \\ \cos y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, & y=\pm\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi. \end{cases}$$

Soluțiile sistemului sînt deci

$$x=y=\pm\frac{\pi}{4}+2k\pi \text{ sau}$$

$$x=y=\pm\frac{3\pi}{4}+2k\pi.$$

● **92.** Din prima ecuație rezultă $\sin(x+y)-\sin(x-y)+\sqrt{3}[\sin(x+y)+\sin(x-y)]=0$ sau $\sqrt{3}\sin x\cos y=-\cos x\sin y$. Ecuația a doua implică $\cos x\sin y\neq 0$, deci împărțim ecuația cu $\sqrt{3}\cos x\sin y$ și obținem $\operatorname{tg}x\operatorname{ctg}y=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, care împreună cu ecuația $\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y=-\sqrt{3}$ ne dă $\operatorname{tg}^2x=1$. Dacă $\operatorname{tg}x=1$ atunci $\operatorname{tg}y=-\sqrt{3}$ și dacă $\operatorname{tg}x=-1$ atunci $\operatorname{tg}y=\sqrt{3}$. Soluțiile în intervalul $(0,360°)$ sînt date de tabelul

x	45°	45°	225°	225°	135°	135°	315°	315°
y	120°	300°	120°	300°	60°	240°	60°	240°

● **93.** Sistemul se poate scrie

$$\begin{cases} \sin\dfrac{x-y}{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{y}{2}\right)=0 \\ \sin\dfrac{x-y}{2}\sin\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{2x+y}{2}=0 \end{cases}$$

Anulînd cîte un factor din prima ecuație și unul din a doua avem soluțiile 1°. $x-y=2k\pi$; 2°. $x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$, $y=(2k_1+1)\pi$; 3°. $x=2k\pi$, $y=\frac{3\pi}{2}+2k_1\pi$; 4°. $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$, $y=\frac{3\pi}{2}+2k_1\pi$, $k, k_1\in\mathbf{Z}$. ● **94.** $AB=3a$. ● **95.** $AB=116{,}9$ cm; $AC=169{,}1$ cm, $C=41°34'18''$, $A=64°42'12''$, $S=8937{,}99$ cm. ● **96.** $a^2-b^2=ac$. ● **97.** Se transformă numărătorul și numitorul fracției în produse

$$\sin A=\operatorname{tg}\frac{B+C}{2}.$$

Cum $B+C=180°-A$ avem $\sin A=\operatorname{tg}\frac{180°-A}{2}=\operatorname{ctg}\frac{A}{2}$ de unde $\sin\frac{A}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ și $A=90°$. ● **98.** ● **99.** $\cos(2C-B)=\cos 2C\cdot\cos B+\sin 2C\cdot\sin B=(\cos^2C-\sin^2C)\cos B+2\sin B\sin C\cos C$. Cum: $\sin B=\frac{b}{a}$; $\cos B=\frac{c}{a}$; $\sin C=\frac{c}{a}$ și $\cos C=\frac{b}{a}$ înlocuindu-le în relație obținem rezultatul cerut.

● **100.** $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\frac{b}{2}}{\frac{c}{2}}=\frac{b}{c}$ deci $\cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{c^2-b^2}{c^2+b^2}$. Înlocuind în expresia $a^4(\cos^2\alpha+1)$ pe $\cos\alpha$ se obține în final $2(b^4+c^4)$. ● **101.** ● **102.** Fie BB', CC' cele două bisectoare ce se taie în O. Din triunghiurile dreptunghice ABC, ABB', ACC' avem

$$\sin B=\frac{AC}{BC}=\frac{b}{a},\quad \sin C=\frac{c}{a},\quad \cos\frac{B}{2}=\frac{AB}{BB'}=\frac{c}{BB'};\quad \cos\frac{C}{2}=\frac{b}{CC'}.$$

Avem

$$\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{a}=\frac{bc}{a^2}=\sin B\cdot\sin C=4\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

deci

$$4 \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cdot\frac{b}{CC'}\cdot\frac{c}{BB'}=\frac{bc}{a^2}$$

sau

$$4 \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cdot\frac{bc}{k^2}=\frac{bc}{a^2} \quad \text{de unde} \quad \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{k^2}{4a^2}.$$

● **103.** $a^3+b^3-c^3=(a+b)c^2-c^3$ ne dă $a^2-ab+b^2=c^2$, $(a+b\neq 0)$ sau $a^2+b^2-c^2=ab$ sau $\frac{a^2+b^2-c^2}{ab}=1=2\cos C$, deci $\cos C=\frac{1}{2}$, de unde $C=60°$. Rezultă că $A+B=120°$, dar $2\sin A\sin B=\cos(A-B)-\cos(A+B)=\frac{3}{2}$, deci $\frac{3}{2}=\cos(A-B)+\frac{1}{2}$, de unde $\cos(A-B)=1$ și $A-B=0$ deci $A=B=60°$. Triunghiul este deci echilateral. ● **104.** $\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\operatorname{ctg}\frac{A+B}{2}$ deci relația se poate scrie $a+b=\operatorname{ctg}\frac{A+B}{2}(a\operatorname{tg}A+b\operatorname{tg}B)$ sau $(a+b)\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}=a\operatorname{tg}A+b\operatorname{tg}B$ sau $a\left(\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}-\operatorname{tg}A\right)=b\left(\operatorname{tg}B-\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}\right)$. Din teorema sinusului avem $a\sin B=b\sin A$ și înlocuind în relație obținem.

$$\sin A\left(\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}-\operatorname{tg}A\right)=\sin B\left(\operatorname{tg}B-\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}\right).$$

Deoarece

$$\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}-\operatorname{tg}x=\frac{\sin\frac{y-x}{2}}{\cos\frac{x+y}{2}\cos x}$$

relația devine

$$\frac{\sin A\cdot\sin\frac{B-A}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}\cos A}=\frac{\sin B\cdot\sin\frac{B-A}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}\cos B} \quad \text{sau} \quad \frac{\sin\frac{B-A}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}(\operatorname{tg}A-\operatorname{tg}B)=0,$$

relație care este adevărată dacă $\frac{B-A}{2}=0$ sau $\operatorname{tg} A=\operatorname{tg} B$ din care obținem $A=B$. ● **105.** $\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$ și $\cos(A+B)=2\cos^2\frac{A+B}{2}-1$. Egalitatea se mai poate scrie

$$\left(\cos\frac{A+B}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\sin\frac{A-B}{2}\right)^2=0.$$

Această egalitate este adevărată dacă și numai dacă $\sin\frac{A-B}{2}=0$, sau $A=B$ și $\cos\frac{A+B}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2}=0$, sau $\cos A=\frac{1}{2}$ sau $A=B=60°$, deci și $C=60°$. ● **106.** Metoda 1. Se înlocuiesc: $a=2R\sin A$ și $b=2R\sin B$ și ținîndu-se cont de relația $A=180°-(B+C)$ se obține $\sin(B-C)=0$ de unde $B=C$. Metoda 2. Se folosește teorema cosinusului exprimîndu-se $\cos C$ în funcție de laturi și se obține $b^2-c^2=0$, cum $b+c\neq 0$ rezultă $b-c=0$ sau $b=c$. ● **107.** Notăm cu $AA'=\alpha$ bisectoarea interioară a unghiului A. Din egalitatea dintre ariile triunghiurilor ABC și $AA'B+AA'C$, avem

$$\alpha=\frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}$$

și expresii analoage pentru celelalte două bisectoare. *Observație.* Puteam utiliza formulele din § 3.1.3.6. și § 11.6. ● **108.** Se înlocuiesc $\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{p(p-c)}{(p-a)(p-b)}}$; $\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$ și se obține în final $a=b$.

● **109.** ● **110.** ● **111.** Pornim de la relația $\operatorname{ctg} A=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{A}{2}}=$

$= \frac{p(-a+b+c)-4c}{2S}$ și cele analoage. Membrul II al egalității devine astfel $\frac{1}{R}(\operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} B+\operatorname{ctg} C)=\frac{1}{2RS}[(a+b+c)^2-2(ab+ac+bc)]=$ $=\frac{a^2+b^2+c^2}{abc}$. ● **112.** Folosim relațiile cunoscute $\cos^2\frac{A}{2}=\frac{p(p-a)}{bc}$; $\cos^2\frac{B}{2}=\frac{p(p-b)}{ac}$; $\cos^2\frac{C}{2}=\frac{p(p-c)}{ab}$. ● **113.** Pornind de la prima relație se utilizează teorema sinusului. Reciproc, se transformă $\operatorname{tg}\frac{B}{2}$ și $\operatorname{tg}\frac{C}{2}$ în funcție de laturi. ● **114.** Folosim relațiile cunoscute $\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{B}{2}=$ $=\frac{p-c}{p}$ etc., de unde obținem $\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{B}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)^2=\frac{s^2}{p^4}$ și de aci relația cerută. ● **115.** ●**116.** Se știe că $(b+c)\alpha\sin\frac{A}{2}=bc\sin A=2S$ de unde $\frac{1}{\alpha\sin\frac{A}{2}}=\frac{b+c}{2S}$; $\frac{1}{\beta\sin\frac{B}{2}}=\frac{a+c}{2S}$; $\frac{1}{\gamma\sin\frac{C}{2}}=\frac{a+b}{2S}$. Adunînd aceste relații obținem relația cerută ● **117.** Folosim relațiile cunoscute $r+r_a+r_b+r_c=\frac{S}{p}+\frac{S}{p-a}+\frac{S}{p-b}+\frac{S}{p-c}$ etc. ● **118.** Ne folosim de relațiile $r_a-r=a\operatorname{tg}\frac{A}{2}$, $r_b+r_c=a\operatorname{ctg}\frac{A}{2}$ și cele analoage apoi se înlocuiește $r_a=\frac{S}{p-a}$; $r_b=\frac{S}{p-b}$; $r_c=\frac{S}{p-c}$ și $\frac{abc}{S}=4R$, și făcîndu-se calculele se obțin relațiile cerute.

● **119.** Avem $\frac{h_a}{f_a}=\cos\frac{\gamma-\beta}{2}$; $\frac{h_b}{f_b}=\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}$; $\frac{h_c}{f_c}=\cos\frac{\beta-\alpha}{2}$. Notînd cu $x=\frac{\gamma-\beta}{2}$, $y=\frac{\alpha-\gamma}{2}$, $z=\frac{\beta-\alpha}{2}$ va rezulta $x+y+z=0$ și va trebui să arătăm că $\cos^2x+\cos^2y+\cos^2z=1+2\cos x\cos y\cos z$ cu condiția ca $x+y+z=0$, identitate cunoscută. ● **120.** I fiind

centrul cercului înscris triunghiului ABC, avem $S_1 = A_{IA_1B_1} + A_{IB_1C_1} + A_{IC_1A_1} = \frac{1}{2}r^2\sin(\pi - C) + \frac{1}{2}r^2\sin(\pi - A) + \frac{1}{2}r^2\sin(\pi - B) = \frac{1}{2}r^2(\sin A + \sin B + \sin C) = 2r^2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$ și apoi $S = 2R^2\sin A\sin B\sin C$,

$$Sr = 2R^2r\sin A\sin B\sin C = 2R^2r\cdot 8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} =$$

$$= 2R^2r\cdot 8\cdot\frac{r}{4R}\cdot\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = 4Rr^2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = 2RS_1.$$

● **121.** $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \leqslant 2\sin\frac{\gamma}{2}$ și $\cos\gamma = 1 - 2\sin^2\frac{\gamma}{2}$. Rezultă $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leqslant 1 + 2\sin\frac{\gamma}{2} - 2\sin^2\frac{\gamma}{2}$ sau $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leqslant \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(1 - 2\sin\frac{\gamma}{2}\right)^2 \leqslant \frac{3}{2}$.

Egalitatea apare numai dacă

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 1 \text{ și } 1 - 2\sin\frac{\gamma}{2} = 0$$

deci dacă $\gamma = 60°$ și $\alpha = \beta$.

● **122.** 1° $y = R^2\frac{\sin x\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\sqrt{\sin x\sin(2\alpha - x)}$, 2°. Se caută maximul funcției $z^2 = \sin^3 x\sin(2\alpha - x)$. Găsim

$$\operatorname{tg} x = \frac{-2 + \sqrt{4 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}}{\operatorname{tg} 2\alpha}.$$

3°. $$y' = \frac{R^2}{2}\sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{2}} \simeq 0{,}806\,R^2.$$

● **123.** 1°. $y = \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Se obține $y_{max} = \sqrt{2}$ și $y_{min} = -\sqrt{2}$. 2°. $y = \frac{1}{2}\left[\sin\left(2x - \frac{\pi}{12}\right) +\right.$

$-\sin\frac{5\pi}{12}\Big]$; $y_{max}=\frac{1}{2}\left(1+\sin\frac{5\pi}{12}\right)$, $\left(2x-\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$, $y_{min}=-\sin^2\frac{\pi}{24}$, $\left(2x-\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)$. ● **124.** 1° $S=R^2\cos x(\sin x+\sqrt{3}\cos x)$. 2° $m\in\left[0,\,1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$. 3° $x=\frac{\pi}{3}$; $x=\frac{\pi}{12}$. ● **125.** a) Se exprimă r_1, r_2 și r din cele trei triunghiuri, ținîndu-se cont și de relațiile din triunghiul dreptunghic. b) Se adună $r_1^2+r_2^2$ unde r_1 și r_2 sînt date prin relațiile de la punctul a). ● **126.** 1° $OA=r\operatorname{ctg}\alpha$; $OB=\frac{2r}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$; $AB=\frac{r\operatorname{ctg}\alpha(1+\operatorname{tg}^2\alpha)}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$. 2° $AB=\left|\frac{x(x^2+r^2)}{x^2-r^2}\right|$. 3° Triunghiul de perimetru minim este echilateral $AB=BA'=A'A=2r\sqrt{3}$. ● **127.** 1° $AC=d\cos\alpha$; $CP=d\sin\alpha\cos\alpha$; $BC=d\sin\alpha$; $AM=\frac{d\cos\alpha(3+2\sin\alpha)}{3}$. Dacă $MB\perp AB$ se ajunge la ecuația $\sin\alpha(2\sin^2\alpha+3\sin\alpha-2)=0$, deci $\alpha=0$ și $\alpha=30°$. 2° $S=\frac{1}{3}d^2\cos\alpha(1-\cos^2\alpha)$. ● **128.** În triunghiurile isoscele ABC și BCD unghiurile egale sînt de 80°. Notînd $BC=a$, avem $DC=2a\sin 10°$. Din triunghiul isoscel AEC avem $AC=2EC\cos 20°$. Dar cum din triunghiul AFC, avem $AC=\frac{a}{2\cos 80°}$, rezultă $EC=\frac{a}{4\sin 10°\cos 20°}$. Conform teoremei sinusului, din triunghiul EDC, găsim

$$\frac{DC}{\sin\alpha}=\frac{EC}{\sin(20°+\alpha)}.$$

Înlocuind cele două laturi DC și EC cu expresiile lor, avem

$$\frac{2a\sin 10°}{\sin\alpha}=\frac{a}{4\sin 10°\cos 20°\sin(20°+\alpha)},$$

de unde

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1-8\sin^2 10°\cos^2 20°}{4\sin^2 10°\sin 40°}$$

deci $\alpha \simeq 5°38'$ (Soluție dată de ing. Nicolae Iasinschi). ● **129.** $A = 119°17'38''$; $B = 126°48'54''$; $C = 60°42'22''$; $D = 53°11'6''$; $BD = 6{,}505$ m; $AC = 5{,}972$ m; $S = 13{,}277$ m^2; $R = 3{,}73$ m. ● **130.** 1° $AM = 2R \cos x$. CM se determină din $\triangle CEM$ unde $CE = 2R(1 - \sin x \cos x)$ și $EM = 2R \cos^2 x$. 2° Se obține ecuația: $1 + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x = m$ și făcînd substituția $\operatorname{tg} x = t$ se obține $(1-m)t^2 - 2t + 3 - m = 0$. Condiția ca să admită rădăcini reale este ca $m \in [2-\sqrt{2}; 2+\sqrt{2}]$. Cum x trebuie să fie unghi ascuțit $\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$ trebuie ca $0 < t < \infty$. Rădăcinile sînt de semne contrare cînd $\frac{m-3}{m-1} < 0$ deci $1 < m < 3$ și atunci rădăcina cea mai mare este singura care corespunde. Rădăcinile sînt de același semn pentru $m < 1$ și $m > 3$ sau $2 - \sqrt{2} \leqslant m < 1$ și $3 < m \leqslant 2 + \sqrt{2}$. Ele sînt pozitive în același timp cu suma lor $\frac{-2}{m-1}$ deci pentru $m < 1$. Rezultă de aici condiția $2 - \sqrt{2} < m < 1$. ● **131.** 1° $BC = \frac{R}{\cos x}$; $AC = \frac{R}{\sin x}$; $AB = \frac{2R}{\sin 2x}$; $CH = R$ minimul lui OC este $2R$. 2° Din asemănarea triunghiurilor APM și AHQ rezultă $\frac{MP}{HQ} = \frac{AP}{AQ}$. Se arată apoi că $AP = OQ$ și $AQ = OP$. 3°. $S_{OMCH} = 2 \cdot S_{MCH} = \frac{2R^2}{\operatorname{tg}(\pi - 2x)} = 4R^2$ de unde $\operatorname{tg}(\pi - 2x) = \frac{1}{2}$ și soluția $x = 76°43'3''$. ● **132.** 1° Notînd $\sphericalangle BAB' = \alpha$ (Fig. 3.132) avem $BB' = a \sin \alpha$, $DD' = h \cos \alpha$, $CC' = CE + EC' = b \sin \alpha + h \cos \alpha$. Se verifică ușor relația cerută. 2° $CC' = CE + EC' =$

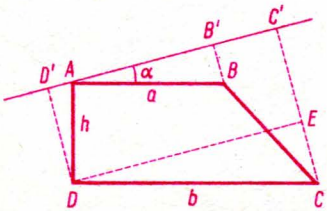


Fig. 3.132

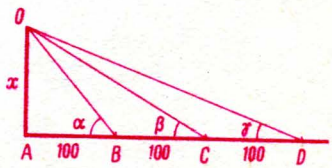


Fig. 3.133

$=b\sin\alpha+DD'=\frac{b}{a}BB'+DD'\cdot$ 3° din $2DD'=BB'+CC'$, rezultă $\operatorname{tg}\alpha=\frac{b}{a+b}$, sau pentru una din lungimile care determină dreapta $D'C'$, de exemplu BB', avem $BB'^2=\frac{a^2h^2}{h^2+(a+b)^2}$. ● **133.** Avem (Fig. 3.133). $\frac{x}{100}=\operatorname{tg}\alpha$, $\frac{x}{200}=\operatorname{tg}\beta$, $\frac{x}{300}=\operatorname{tg}\gamma$ și $\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)=\operatorname{tg}\ 90°=\infty$. Deci $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha=1$, de unde, înlocuind tangentele, rezultă $x=100$. ● **134.** Avem (Fig. 3.134) $\sphericalangle ACB=90°-(\alpha+\beta)$, $\sphericalangle ABC=90°+\beta$. Notînd cu x raza cercului circumscris triunghiului ABC, din teorema sinusului avem

$$\frac{AC}{\cos\beta}=\frac{AB}{\cos(\alpha+\beta)}=2x.$$

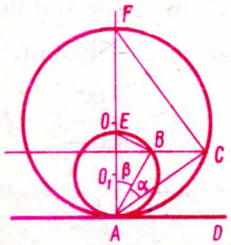


Fig. 3.134

Cum din triunghiurile dreptunghice ACF și ABE, rezultă $AC=2R\cos(\alpha+\beta)$, $AB=2r\cos\beta$, relațiile precedente devin

$$\frac{2R\cos(\alpha+\beta)}{\cos\beta}=\frac{2r\cos\beta}{\cos(\alpha+\beta)}=2x.$$

Din primele două rapoarte, deducem $\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\beta}=\sqrt{\frac{r}{R}}$ și apoi din primul și al treilea $x=\sqrt{rR}$.

Capitolul IV
Probleme diverse

● **1.** 1° Din triunghiurile OAP și OBP avem $\frac{x}{\sin A}=\frac{a}{\sin P_1}$; $\frac{x}{\sin B}=\frac{b}{\sin P_2}$ unde $P_1=\sphericalangle APO$, $P_2=\sphericalangle BPO$. Deci $\sin P_1=\frac{a\sin A}{x}$, $\sin P_2=\frac{b\sin B}{x}$, $\cos P_1=\frac{\sqrt{x^2-a^2\sin^2 A}}{x}$, $\cos P_2=\frac{\sqrt{x^2-b^2\sin^2 B}}{x}$. Apoi avem $\cos(A+B)=-\cos(P_1+P_2)=-\frac{\sqrt{x^2-a^2\sin^2 A}\sqrt{x^2-b^2\sin^2 B}}{x^2}+\frac{ab\sin A\sin B}{x^2}$; $\sin(A+B)=\sin(P_1+P_2)=\frac{a\sin A}{x}\frac{\sqrt{x^2-b^2\sin^2 B}}{x}+\frac{b\sin B}{x}\frac{\sqrt{x^2-a^2\sin^2 A}}{x}$. Ridicînd la pătrat și ținînd seama de expresia lui $\cos(A+B)$ se obține formula pentru x^2. 2°. Avem $x^2=\frac{a^2\sin^2 A}{\cos^2 y}\cdot(1+\operatorname{tg}^2\varphi+2\operatorname{tg}\varphi\sin y)$. Cum s-a presupus că $A+B$ este apropiat de $\frac{\pi}{2}$, rezultă că y este mic, deci putem lua $\cos y\sim 1$, $\sin y\sim y$. Rezultă

$$x^2\cong\frac{a^2\sin^2 A}{\cos^2\varphi}(1+2y\sin\varphi\cos\varphi).$$

Cum $y^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi$ este foarte mic față de y, putem adăuga această cantitate în paranteză și avem

$$x\cong\frac{a\sin A}{\cos\varphi}+a\,y\sin A\sin\varphi,$$

deci $k=a\sin A\sin\varphi$. 3° Pentru calculul lui x, putem folosi fie formula

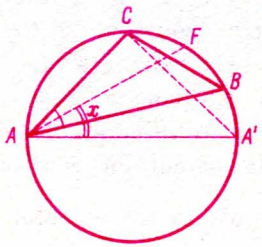
găsită la 1°, fie aplicînd teorema sinusului în triunghiul ABP și teorema cosinusului în triunghiul APO. Găsim $x=248{,}0$ m. ● **2.** 1° $\cos\alpha=$ $=2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1=2(2\cos^2\frac{\alpha}{4}-1)^2-1=8\cos^4\frac{\alpha}{4}-8\cos^2\frac{\alpha}{4}+1$. 2° $x^2=$ $=\frac{2\pm\sqrt{2(1+\cos\alpha)}}{4}=\frac{1}{2}\left(1\pm\cos\frac{\alpha}{2}\right)$; $x=\pm\sin\frac{\alpha}{4}$; $x=\pm\cos\frac{\alpha}{4}$. 3°. Ecuația devine $m^4x^4-pm^2x^2+q=0$. Ca să o aducem la forma (1) trebuie ca $m^4=pm^2$ deci $m=\sqrt{p}$ așa că $p^2x^4-px^2+q=0$ și $-1\leqslant\cos\alpha=$ $=\frac{p^2-8q}{2}\leqslant 1$ și deci $-8q\leqslant 0$ și $8q\leqslant 2p^2$ sau $p\geqslant 2\sqrt{q}$. 4°. Avem $p=$ $=\sqrt{2}$ deci $m=\sqrt[4]{2}$ și $q=\frac{1}{8}$ așa că obținem $\cos\alpha=\frac{1}{2}$; $\alpha=60°$; $y=$ $=x\sqrt[4]{2}$. Factorul de proporționalitate fiind $m=\sqrt[4]{2}$ rădăcinile găsite sînt: $\sin\frac{\alpha}{4}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{4}\right)$; $-\sin\frac{\alpha}{4}=\sin\left(-\frac{\alpha}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{4}\right)\cos\frac{\alpha}{4}$; $-\cos\frac{\alpha}{4}=\cos\left(\pi-\frac{\alpha}{4}\right)$. Arcele dintre 0 și π sînt $\frac{\alpha}{4}=15°$; $90°-15°=75°$; $90°+15°=105°$; $180°-15°=165°$. 5° Cînd exprimăm pe $\cos\alpha$ în funcție de $\cos\frac{\alpha}{6}$ avem $\cos\alpha=4\cos^3\frac{\alpha}{3}-3\cos\frac{\alpha}{3}=4\left(8\cos^6\frac{\alpha}{6}-12\cos^4\frac{\alpha}{6}+\right.$ $\left.+6\cos^2\frac{\alpha}{6}-1\right)-3\left(2\cos^2\frac{\alpha}{6}-1\right)=32\cos^6\frac{\alpha}{6}-48\cos^4\frac{\alpha}{6}+18\cos^2\frac{\alpha}{6}-1$. Identificînd obținem $32=nm^6$; $-48=pnm^4$; $18=qnm$; $1+\cos\alpha=$ $=-nr$; $\cos\alpha=\frac{108r}{p^3}-1$ și deci

$$-1<\frac{108r}{p^3}-1<1$$

sau ținînd seama că $p<0$, $\frac{108r}{p^3}>0$; $r<0$ și $p<54r$ și $p^2=4q$. 6°. Rădăcinile ecuației $f(\cos^2\varphi)=\cos^4\varphi-2y_0\cos^2\varphi+x_0=0$ sînt $\cos^2\varphi=y_0\pm$ $\pm\sqrt{y_0^2-x_0}$ deci sînt reale dacă $y_0^2-x_0\geqslant 0$ și ele trebuie să fie cuprinse între 0 și 1 ca să poată fi pătrate de cosinusuri. Dacă $x_0<0$ ele sînt de semne contrare și nu poate conveni decît cea mai mare etc. ● **3.** 1°

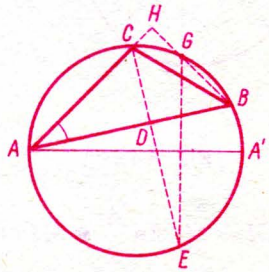
Notînd $\sphericalangle ACD=\alpha$, triunghiul ABC are unghiurile α, 2α și $\pi-3\alpha$. Utilizînd teorema sinusului $\frac{AB}{\sin\alpha}=\frac{BC}{\sin 2\alpha}=\frac{AC}{\sin 3\alpha}=\lambda$ găsim $\cos\alpha=\frac{m}{2}$. Pentru ca problema să fie posibilă trebuie ca cele trei unghiuri să fie cuprinse între 0 și π, condiție realizată dacă $0<3\alpha<\pi$ deci $0<\alpha<\frac{\pi}{3}$ sau $\frac{1}{2}<\cos\alpha=\frac{m}{2}<1$, așa că $1<m<2$. Pentru ca toate unghiurile să fie ascuțite, deci 2α și $\pi-3\alpha$ trebuie să fie ascuțite. Acestea conduc la condițiile $\sqrt{2}<m<2$ și $1<m<\sqrt{3}$, satisfăcute simultan pentru $\sqrt{2}<m<\sqrt{3}$. 2°. Scoțînd laturile din teorema sinusului, obținem identitatea $\sin^2 2\alpha=\sin\alpha(\sin\alpha+\sin 3\alpha)$. Cu $AD=k$, avem apoi $AC=km$, $AB=\frac{km}{m^2-1}$, $BC=\frac{km^2}{m^2-1}$. ● **4.** 1°. Să calculăm laturile triunghiului. Din triunghiurile dreptunghice $AA'B$ și $AA'C$ (Fig. 4.4 a), avem $AB=2R\cos\left(x-\frac{A}{2}\right)$, $AC=2R\cos\left(x+\frac{A}{2}\right)$ și din teorema sinusului $BC=2R\sin A$. Aria triunghiului ABC este $S=\frac{AB\cdot AC\sin A}{2}=R^2\sin A(\cos 2x+\cos A)$. Cum $2p=AB+AC+BC=4R\cos\frac{A}{2}\left(\sin\frac{A}{2}+\cos x\right)$, avem

$$r=\frac{S}{p}=\frac{R\sin\frac{A}{2}(\cos 2x+\cos A)}{\sin\frac{A}{2}+\cos x}=2R\sin\frac{A}{2}\left(\cos x-\sin\frac{A}{2}\right).$$



a

Fig. 4.4 a



b

Fig. 4.4 b

2° Cînd x variază, maximul ariei S are loc pentru $x=0$ și este $S_1=R^2 \sin A(1+\cos A)$. Cînd A variază, S_1 este maxim dacă $A=\frac{\pi}{3}$ și are valoarea $\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$. 3°. Să ducem înălțimile CDE și BGH (fig. 4.4 b), unde D și H sînt pe laturile AB, respectiv AC, iar E, G sînt pe cercul dat. Din triunghiul dreptunghic ACD avem $\sphericalangle ACD=\frac{\pi}{2}-A=$constant, deci și arcul AE este constant. Cum A este fix, trebuie ca și E să fie fix, deci înălțimea din C a triunghiului ABC, trece prin punctul fix E. Analog, din triunghiul dreptunghic ABH rezultă $\sphericalangle ABG=\frac{\pi}{2}-A$ și că punctul G de pe înălțimea BGH este fix. Cum $\sphericalangle ACD=\sphericalangle ABG$ rezultă că arcele AE și ACG sînt egale, deci E și G sînt simetrice față de diametrul AA'. Locurile picioarelor D și H ale celor două înălțimi sînt cercurile cu diametrele AE, respectiv AG. 4°. Centrul I al cercului înscris triunghiului ABC (Fig. 4.4 c) este la intersecția bisectoarelor AF și CJ (J fiind pe cercul dat). Cum AF este bisectoarea unghiului A, arcele CF și BF sînt egale. Măsurile unghiurilor JCF și CIF sînt $\frac{\overset{\frown}{JB}+\overset{\frown}{BF}}{2}$, respectiv $\frac{\overset{\frown}{CF}+\overset{\frown}{AJ}}{2}$. Cum $\overset{\frown}{AJ}=\overset{\frown}{BJ}$, căci măsoară unghiurile egale ACI și ICF (CJ este bisectoarea unghiului din C), rezultă $\sphericalangle JCF=\sphericalangle CIF$ și triunghiul CFI este isoscel, deci $IF=CF=FB$. Perpendiculara în I pe AI este paralelă cu FA', căci $\sphericalangle AFA'$ este drept. Cum A este constant, rezultă, arc $CF=$constant și $CF=IF=$ $=$ const., deci distanța lui A' la dreapta IK este constantă și egală cu IF, prin urmare dreapta IK rămîne tangentă la cercul cu centrul în A' și raza $CF=2R\sin\frac{A}{2}$.

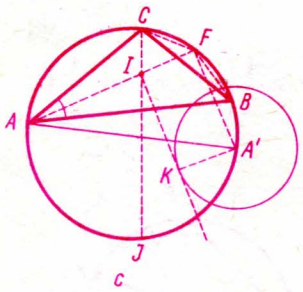


Fig. 4.4 c

● **5.** Centrul sferei circumscrise tetraedrului $SABC$, avînd un triedru tridreptunghic în S este intersecția perpendicularei pe cercul circumscris triunghiului SBC în centrul său, cu planul perpendicular

pe muchia SA în mijlocul său. Ori SA fiind perpendicular pe planul SBC, axa cercului SBC este paralela la SA dusă prin D, mijlocul lui BC. Centrul sferei circumscrise este punctul O de pe această paralelă astfel ca $DO=\frac{SA}{2}$. Dreapta OD este în planul ASD; ducem OS și fie G punctul unde ea întîlnește pe AD. Punctul G este centrul de omotetie inversă a segmentelor DO, SA deci $GD=\frac{GA}{2}$ și prin urmare G este centrul de greutate al triunghiului ABC și avem $\frac{OG}{GS}=\frac{1}{2}$ de unde $SO=\frac{3}{2}SG$ deci: dacă un tetraedru $SABC$ are un triedru tridreptunghic în S, centrul sferei circumscrise este punctul O de pe dreapta SG care unește S cu centrul de greutate G al feței opuse astfel ca $SO=\frac{3}{2}SG$. Dacă O și S sînt fixe, punctul G astfel ca $SG=\frac{2}{3}SO$ este de asemenea fix. În consecință: Dacă un triedru dreptunghic are ca vîrf un punct fix de pe o sferă de centru O, cele trei puncte A, B, C în care muchiile sale înțeapă sfera, determină un plan care trece, dacă triedrul variază, prin punctul fix $G\in SO$ astfel ca $SG=\frac{2}{3}SO$. ● **6.** 1°. Triunghiurile ABC', BCA' și CAB' sînt egale, ca avînd o latură și unghiurile alăturate respectiv egale. Rezultă atunci că $B'C'=B'A+AC'=C'B+BA'=C'A'$, și analog și $A'B'=B'C'$. 2°. Cum unghiurile triunghiului $A'B'C'$ sînt de 60°, cele trei vîrfuri descriu trei cercuri simetrice față de laturile triunghiului ABC ale cercului circumscris acestui triunghi. 3°. Dacă D, E sînt mij-

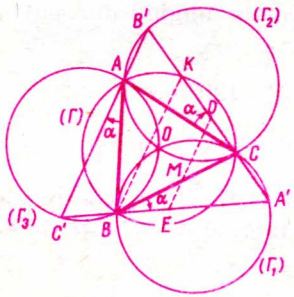


Fig 4.6 a

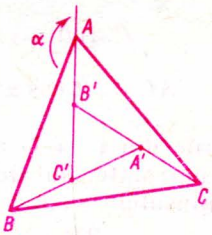


Fig. 4.6 b

laturilor $A'B'$, $A'C'$, dreapta DE este paralelă cu $B'C'$. Prin B să ducem o paralelă BK la DE (K este pe $A'B'$). Avem $KB'=BC'$. Cum triunghiurile ABC' și ACB' sînt egale, avem $KB'=BC'=CA'$. Punctul D, mijlocul lui $A'B'$ este mijlocul lui CK. Deci în triunghiul KCB dreapta DE dusă prin mijlocul D a lui KC și paralelă cu BK, taie pe BC în mijlocul M al ei. Deci DE trece prin punctul fix M (Fig. 4.6 a). 4°. Cum $B'C'=C'A+C'B$, din triunghiul $AC'B$ avem

$$\frac{AB}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{BC'}{\sin\alpha}=\frac{AC'}{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{A'B'}{\sin\alpha+\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)}$$

căci

$$\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right),$$

deci avem

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{2\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6}}{2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}$$ (Fig. 4.6 b).

Cînd $\alpha=-\frac{\pi}{6}$, raportul $A'B'/AB$ este egal cu zero, deci triunghiul $A'B'C'$ se reduce la un punct. Cînd α crește pînă la $\frac{\pi}{3}$, raportul crește de la zero la 2 și apoi descrește de la 2 la zero cînd α crește pînă la $\frac{5\pi}{6}$. Prin urmare, maximul lui este 2 și este atins pentru $\alpha=\frac{\pi}{3}$. ● **7.** 1° Cum triunghiul OCD este echilateral și cum suma unghiurilor patrulaterului $ABCD$ este 360°, avem

$$\hat{C}=60°+\alpha,\ \hat{D}=180°-\alpha,\ \hat{B}=120°-\alpha,$$

$$AC=2R\cos\alpha,\ BD=R\left(-\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha\right).$$

2° Unghiurile din C și D ale triunghiului CDF sînt respectiv egale cu unghiurile patrulaterului din B și A, iar unghiul din F este de 60°. Din teorema sinusului avem

$$CF=\frac{2R}{\sqrt{3}}\sin\alpha;\ FD=R\left(\cos\alpha+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\alpha\right).$$

iar raza cercului circumscris este egal cu $\frac{R}{\sqrt{3}}$. 3° Cum unghiul din F este de 60° și cum laturile lui trec prin punctele fixe A și B, locul lui este un cerc de pe care segmentul AB se vede sub unghiul constant de 60°. 4° Din $AC=3CF$ rezultă $\alpha=30°$. Unghiul B este atunci drept, deci OD coincide cu OB. ● **8.** 1° Se știe că $r_a=\frac{S}{p-a}$; $r_b=\frac{S}{p-b}$; $r_c=\frac{S}{p-c}$; $r=\frac{S}{p}$ deci

$$r_a r_b r_c=\frac{S^3}{(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{p^3 r^3}{(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ și}$$

$$\frac{r_a r_b r_c}{r^3}=\frac{p^3}{(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Dacă semiperimetrul triunghiului rămîne constant $(p-a)+(p-b)+(p-c)=p$ și prin urmare produsul celor trei factori $(p-a)(p-b)(p-c)$ este maxim cînd factorii sînt egali, deci cînd $a=b=c$, triunghiul fiind echilateral, deci $p-a=p-b=p-c=\frac{p}{3}$ așa că

$$\frac{p^3}{(p-a)(p-b)(p-c)} \geqslant \frac{p^3}{\left(\frac{p}{3}\right)^3}=27$$

$$\frac{r_a r_b r_c}{r^3} \geqslant 3^3;\ r_a r_b r_c \geqslant (3r)^3.$$

2° Se știe că $\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{r}{p-a}$; $\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{r}{p-b}$; $\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{r}{p-c}$ și prin urmare $\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}=\frac{r^6}{(p-a)^2(p-b)^2(p-c)^2}=\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p^3}$ căci $S^6=p^6r^6=p^3(p-a)^3(p-b)^3(p-c)^3$. Ținînd seama că $\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p^3} \leqslant \frac{1}{27}$ rezultă că $\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}\operatorname{tg}^2\frac{C}{2} \leqslant \frac{1}{27}$. ● **9.** 1°. Discriminantul ecuației este

$$(\lambda-1)^2-(2\lambda+1)=\lambda^2-4\lambda=\lambda(\lambda-4).$$

Produsul rădăcipilor este $2\lambda+1$. Suma este dată de $2(\lambda-1)$. Discuția este dată de tabloul

	Δ	P	S	Natura rădăcinilor
λ	$\lambda(\lambda-4)$	$2\lambda+1$	$2(\lambda-1)$	
$-\infty$		$-$	$-$	2 reale: una pozitivă, una negativă
	$+$	$-$		
		$-$	$-$	
$-\frac{1}{2}$	$+$	0	$-$	2 reale: una nulă, una negativă
				2 reale negative
	$+$	$+$	$-$	
0	0	$+$	$-$	2 reale, confundate, negative
	$-$	$+$	$-$	
1	$-$	$+$	0	2 complexe
	$-$	$+$	$+$	
4	0	$+$	$+$	2 reale, confundate, pozitive
	$+$	$+$	$+$	
$+\infty$		$+$	$+$	2 reale, pozitive

2°. Triunghiul nu poate fi dreptunghic pentru că rădăcinile nu pot tinde către infinit, coeficientul termenului de gradul cel mai mare nu se poate anula. Triunghiul poate fi isoscel cînd rădăcinile sînt egale deci cînd $\lambda=4$. Triunghiul este oarecare cînd $\lambda<-\frac{1}{2}$ și $\lambda>4$; în primul caz este obtuzunghi și ascuțitunghi în al doilea caz. ● **10.** 1° Putem scrie funcția $y=2\sin^2 x-3\cos x'=-(2\cos^2 x+3\cos x-2)$ și prin urmare ea se anulează pentru $\cos x=\frac{-3\pm 5}{4}$ dar numai $\cos x=\frac{1}{2}$ este acceptabilă, așa că $x=\frac{\pi}{3}$ iar cînd $\cos\frac{\pi}{2}=0, y=2$. Derivata funcției este $y'=4\cos x\sin x+3\sin x=\sin x(4\cos x+3)$ deci se anulează cînd $\sin x=0$ așa că $x=0$ sau $x=\pi$; cînd $x=0$ avem un minim, care-i egal cu -3; cînd $x=\pi$, avem un minim egal cu $+3$, cînd $\cos x=-\frac{3}{4}$

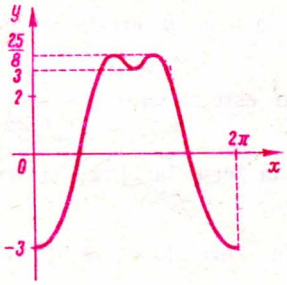


Fig. 4.10

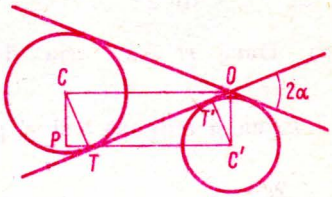


Fig. 4.11

deci $x_1 = 138°35'26''$ avem un maxim, egal cu $\frac{25}{8}$. Curba este simetrică în raport cu dreapta $x=\pi$ (Fig. 4.10). 2°. Putem scrie ecuația $m = 2\sin^2 x - 3\cos x = y$, așa că rădăcinile ei sînt abscisele punctelor de intersecție dintre curba reprezentativă a funcției y și o paralelă cu axa absciselor dusă la distanța m de ea. Se vede că pentru $-3<m<3$ sînt numai două soluții iar pentru $3<m<\frac{25}{8}$ avem patru soluții; pentru $m=-3$; $m=+3$; $m=\frac{25}{8}$ avem soluții duble $x=0,\ 2\pi$; $x_1,\ 2\pi-x_1$; π.

● **11.** 1° Avem (Fig. 4.11) $OC=\frac{r}{\sin\alpha}$, $OC'=\frac{r'}{\cos\alpha}$. Aria dreptunghiului $OCPC'$ este $y=\frac{2rr'}{\sin 2\alpha}$. Cum $2\alpha<\pi$, rezultă y pozitiv. Dacă $r+r'=k$ (constant), atunci aria este $y=\frac{2r(k-r)}{\sin 2\alpha}$ și ea variază ca produsul a doi factori cu sumă constantă $r(k-r)$, deci este maximă cînd factorii sînt egali, așa că $r=r'=\frac{k}{2}$. Cînd r crește de la zero la $\frac{k}{2}$, y crește de la zero la $\frac{k^2}{2\sin 2\alpha}$ și apoi cînd r crește de la k, y descrește pînă la zero.

Dacă $r-r'=k$ (constant) avem $r'=r-k$ și r variază de la k la $+\infty$. Avem $y=\dfrac{2r(r-k)}{\sin 2\alpha}$. Cînd r crește de la k la $+\infty$, y crește de la zero la $+\infty$. Dacă $rr'=k$, aria dreptunghiului este constanta $\dfrac{2k}{\sin 2\alpha}$. Dacă $\dfrac{r}{r'}=k$, ca și mai sus r și r' pot varia de la zero la $+\infty$ și aria este $y=\dfrac{2r^2}{k\sin 2\alpha}$, expresie crescătoare de la zero la $+\infty$. 2° Aria este $y=\dfrac{2k}{\sin 2\alpha}$. Pentru $0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$, $\sin 2\alpha$ crește de la zero la unu și y descrește de la $+\infty$ la $2k$. Cînd $\dfrac{\pi}{4}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, y crește de la $2k$ la $+\infty$. 3° Cum $\dfrac{r}{r'}=k$, avem $\dfrac{OC}{OC'}=\dfrac{r\cos\alpha}{r'\sin\alpha}=\dfrac{k}{\operatorname{tg}\alpha}$. Cum $OC'=CP$, rezultă $\operatorname{tg}\widehat{COP}=\dfrac{CP}{OC}=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{k}=\text{const.}$ Locul punctului P este dreapta care face cu OC unghiul definit mai sus. ● **12.** Triunghiurile dreptunghice AMB și ACM permit să scriem $MB=2R\cos x$ și $AM=2R\sin x$ iar $MC=AM\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=2R\sin^2 x=2R(1-\cos^2 x)$ deci trebuie să avem $2R\cos x+4R(1-\cos^2 x)=l$ sau $4R\cos^2 x-2R\cos x+l-4R=0$. Rădăcinile trebuind să fie reale $R^2-4R(l-4R)\geqslant 0$ deci $l\leqslant\dfrac{17R}{4}$ iar dacă punem condiția ca, în modul, să fie subunitare, obținem $l\geqslant 2R$. ● **13.** 1° Dacă $AA'=h$; $A'M=h\operatorname{ctg}\theta$; $A'C=h\operatorname{ctg}\hat{C}$; $A'B=h\operatorname{ctg}\hat{B}$ și $BM=\dfrac{BC}{2}=\dfrac{BA'+A'C}{2}=\dfrac{h}{2}(\operatorname{ctg}\hat{B}+\operatorname{ctg}\hat{C})$; $A'M=h\operatorname{ctg}\theta=$ $=BM-BA'=\dfrac{h}{2}(\operatorname{ctg}\hat{C}-\operatorname{ctg}\hat{B})$, $2\operatorname{ctg}\theta=\operatorname{ctg}\hat{C}-\operatorname{ctg}\hat{B}$. 2° Folosind

înălțimea BB' deducem din egalitatea unghiurilor $\widehat{ACB}=\widehat{BHA'}$.

$$\frac{HA'}{\sin A'BH}=\frac{BA'}{\sin BHA'};\quad HA'=h\operatorname{ctg}\hat{B}\,\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\hat{C}\right)}{\sin C}=h\operatorname{ctg}\hat{B}\operatorname{ctg}\hat{C}.$$

Cînd H este mijlocul lui AA' avem $HA'=\frac{h}{2}=h\operatorname{ctg}\hat{B}\operatorname{ctg}\hat{C}$. 3°. Din relația $\operatorname{tg}\hat{C}\operatorname{tg}\hat{B}=2$ deducem că $\operatorname{tg}\hat{C}=\frac{2}{\operatorname{tg}\hat{B}}$ și folosind relația $2\operatorname{tg}\theta=$ $=\operatorname{tg}\hat{B}\operatorname{tg}\hat{C}$ obținem ecuația: $\operatorname{tg}^2\hat{B}-4\operatorname{ctg}\theta\operatorname{tg}\hat{B}-2=0$ care dă $\operatorname{tg}\hat{B}=2\operatorname{ctg}\theta\pm\sqrt{4\operatorname{ctg}^2\theta+2}$ și $\operatorname{tg}\hat{C}=-2\operatorname{ctg}\theta\pm\sqrt{4\operatorname{ctg}^2\theta+2}$. Ipoteza că $\hat{B}>\hat{C}$ arată că $\operatorname{tg}\hat{C}>0$ deci nu putem lua înaintea radicalului decît semnul pozitiv. Avem

$$\operatorname{tg}\hat{B}=2\operatorname{ctg}\theta+\sqrt{4\operatorname{tg}^2\theta+2}$$
$$\operatorname{tg}\hat{C}=-2\operatorname{ctg}\theta+\sqrt{4\operatorname{tg}^2\theta+2}$$

$$\operatorname{tg}\hat{A}=\operatorname{tg}(\pi-\hat{B}-\hat{C})=-\operatorname{tg}(\hat{B}+\hat{C})=-\frac{\operatorname{tg}\hat{B}+\operatorname{tg}\hat{C}}{1-\operatorname{tg}\hat{B}\operatorname{tg}\hat{C}}=2\sqrt{4\operatorname{ctg}^2\theta+2}.$$

● **14.** 1°. Se notează unghiul $\widehat{ABM}=\alpha$ și cu H proiecția lui M pe AB (fig. 4.14). Vrem ca $BM^2=AM\cdot AB$ dar $BM^2=HB\cdot AB$ și ar urma $AM=HB$. Știm că $AM=2R\sin\alpha$; $BM=2R\cos\alpha$, deci $HB=2R\cos^2\alpha$ și $\sin^2\alpha+\sin\alpha-1=0$; $AM=100\,\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=61{,}8$; $BM\simeq$ $\simeq 100\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\simeq 78{,}5$ cm; $MT=OM\operatorname{tg}\beta=R\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2R\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\simeq 205{,}8$ cm; $\alpha=38°10'20''$ (0,666 rad). 2°. Se notează $\widehat{ABM'}=\alpha'$ și condiția impusă duce la $2R\cos\alpha'=R(\sin\alpha'+1)$; $\alpha'=36°52'11''$ sau 0,644 radiani; arc $AM'=2\alpha'$. 3°. Se notează $\widehat{ABM}=\gamma$ și $BM=2R\cos\gamma$, dar $\gamma<\frac{\pi}{4}$. $MT=R\operatorname{tg}2\gamma=\frac{2R\sin\gamma\cos\gamma}{1-2\sin^2\gamma}$ și relația cerută devine $k=$ $=\frac{\sin\gamma}{1-2\sin^2\gamma}$ sau $\sin^2\gamma=\frac{4k^2+1\mp\sqrt{1+8k^2}}{8k^2}$. Mai trebuie ca pă-

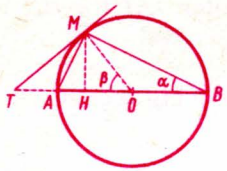


Fig. 4.14

tratul sinusului să fie cuprins în $[0, 1]$.

4°. Din triunghiurile dreptunghice AMB și OMT deducem că dacă $AM=x$, $BM=\sqrt{1-x^2}$; $HB=1-x^2$; $MH=x\sqrt{1-x^2}$ și cum $AB=1$, $HO=\frac{1-2x^2}{2}$; $OT=\frac{1}{2(1-2x^2)}$ și $MT=\frac{x}{1-2x^2}\sqrt{1-x^2}$ așa că avem

$$k=\frac{\frac{x\sqrt{1-x^2}}{1-2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{x}{1-2x^2}.$$

● **15.** Avem $AH=AB\sin\hat{B}$; $\cos\hat{B}=\sin\hat{C}=\frac{AH}{AC}$. Înlocuind în relația dată obținem $\sin\hat{B}+2\cos\hat{B}=m$ și făcînd schimbarea de variabilă $\operatorname{tg}\frac{\hat{B}}{2}=t$ ajungem la $f(t)=t^2-\frac{2t}{m+2}+\frac{m-2}{m+2}=0$, $t=\frac{1\pm\sqrt{5-m^2}}{m+2}$. Ca rădăcinile să fie reale este necesar ca $5>m^2$ dar pentru că $m>0$ avem $0<m<\sqrt{5}$. Unghiul B este ascuțit deci $0<t<\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$. Deducem că pentru $m>2$ amîndouă rădăcinile sînt acceptabile iar pentru $1<m<2$ este acceptabilă doar cea mai mare.

● **16.** Dacă notăm $OM=x$ și $\widehat{OMA}=\alpha$ din triunghiul OMA deducem $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{x}{\sin(\theta-\alpha)}$ iar din ΔOMB, $\frac{a}{\sin 2\alpha}=\frac{x}{\sin(\theta+2\alpha)}$ așa că prin împărțire ajungem la $\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin(\theta+2\alpha)}{\sin(\theta-\alpha)}$ și prin urmare $\sin\theta=4\cos\theta\sin\alpha\cos\alpha=2\cos\theta\sin 2\alpha$ și $\sin 2\alpha=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\theta$. 1 Cum $\widehat{AOM}=\pi-\theta$ este obtuz, avem că $\widehat{OMA}$ este ascuțit și $0<\operatorname{tg}\theta<2$; $0<\theta<63°26'6''$. Deducem $x=a\frac{\sin(\theta+2\alpha)}{\sin 2\alpha}=a(\cos\theta\pm\sqrt{5\cos^2\theta-1})$.

Înaintea radicalului se ia semnul $+$ cînd $2\alpha<\frac{\pi}{2}$ și vom lua semnul $-$ cînd $2\alpha>\frac{\pi}{2}$. Avem două valori suplimentare 2α și $\pi-2\alpha$, deci pentru x sînt două soluții cînd $a(\cos\theta-\sqrt{5\cos\theta-1})>0$, deci cînd $\cos\theta<\frac{1}{2}$; $60°<\theta<63°26'6''$. $2°$. Luăm pe θ numai ascuțit, căci pentru $\pi-\theta$ figurile sînt simetrice. Avem $BH=a\sin\theta$; $OH=a\cos\theta$ și $\cos\widehat{AOH}=-\cos\widehat{BOH}=-\cos\theta$; $l=AB+BH+AH=2a+a\sin\theta+$ $+a\sqrt{4-3\sin^2\theta}$. Pentru că $AH+HB>AB$; $l>4a$; dacă $\frac{l}{a}=b$ trebuie

$$4<b<\frac{6+4\sqrt{3}}{3}\simeq 4{,}309.$$

● **17.** Se aplică teorema lui Pitagora generalizată, în triunghiurile AMB și AMC și atunci

$$\left(\frac{MB}{MC}\right)^2=y^2=\frac{c^2+x^2-2cx\cos\frac{\hat{A}}{2}}{b^2+x^2-2bx\cos\frac{\hat{A}}{2}}$$

iar derivata

$$(y^2)'=-\left[x^2-\frac{b+c}{\cos\frac{\hat{A}}{2}}x+bc\right]\frac{2(b-c)\cos\frac{\hat{A}}{2}}{\left[x^2+b^2-2bx\cos\frac{\hat{A}}{2}\right]^2}.$$

Dacă $b>c$ atunci semnul derivatei este contrar cu al trinomului $x^2-\frac{b+c}{\cos\frac{\hat{A}}{2}}x+bc$, ale cărui rădăcini sînt

$$x=\frac{1}{2\cos\frac{\hat{A}}{2}}\left[b+c\pm\sqrt{(b+c)^2-4bc\cos^2\frac{\hat{A}}{2}}\right].$$

Ţinem seama că discriminantul se poate scrie $(b+c)^2-4bc\cos^2\frac{\hat{A}}{2}=$ $=b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}=a^2$ aşa încît rădăcinile sînt $x=\frac{b+c\pm a}{2\cos\frac{\hat{A}}{2}}$. Pentru $x_1=\frac{b+c-a}{2\cos\frac{\hat{A}}{2}}$ avem un minim şi pentru $x_2=\frac{b+c+a}{2\cos\frac{\hat{A}}{2}}$ avem un maxim. Valoarea minimului este $y_m^2=\frac{a+b-c\cos\hat{A}}{a+c+b\cos\hat{A}}$ iar valoarea maximului este $y_M^2=\frac{a+b-c\cos\hat{A}}{a+c-b\cos\hat{A}}$. 2°. Folosind proiecţiile pe laturile unghiului BAC, a poziţiilor extreme ale lui M, se verifică că punctul M coincide, în cazul maximului, cu centrul cercului înscris în triunghi şi, în cazul minimului, cu centrul cercului exînscris. 3°. Pentru cazul particular, avem $y^2=\frac{4+x^2-2x}{9+x^2-3x}$ a cărei reprezentare nu prezintă nici o dificultate. ● **18.** 1°. Se construieşte arcul de cerc de unde segmentul BC se vede sub unghiul A şi se duce o paralelă cu BC la distanţa h_a; punctele unde această paralelă întîlneşte arcul dau al treilea vîrf, vîrful A, al triunghiului. 2°. Pe o latură a unghiului B se ia un segment cît a şi se ridică mediatoarea segmentului BC; centrul cercului circumscris triunghiului, O, este la distanţa R de B sau C. Vîrful A se obţine la intersecţia cercului cu latura unghiului B care nu trece prin C. 3°. Se ţine seamă că centrul cercului înscris în triunghi este la intersecţia bisectoarelor interioare şi din el segmentul BC se vede sub un unghi cît $90°+\frac{A}{2}$. Se construieşte arcul de cerc de unde segmentul BC se vede sub unghiul de $90°+\frac{A}{2}$ şi se intersectează cu o paralelă la BC, dusă la distanţa cît r; centrul cercului înscris se află în una din aceste intersecţii şi apoi se duc tangentele la cercul înscris din B şi C, ele se intersectează în al treielea vîrf al triunghiului, în punctul A.

● **19.** 1°. Triunghiul dreptunghic ABC ne dă $R=AC=AB\operatorname{tg}\widehat{ABC}=r\operatorname{tg}x$; $BH=r\cos x$; $HE=BE-BH=r-r\cos x=r(1-\cos x)$; $HC=R\sin x=r\dfrac{\sin^2 x}{\cos x}$. $FH=FC-HC=R-R\sin x=r\dfrac{\sin x+\cos^2 x-1}{\cos x}$.

2°. Vrem să avem $EF=mAB$ sau $r\dfrac{\sin x+\cos x-1}{\cos x}=rm$ sau $\sin x+(1-m)\cos x-1=0$ și folosind schimbarea de variabilă $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=t$, avem $(m-2)t^2+2t-m=0$ și $t=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+m(m-2)}}{m-2}=-\dfrac{1\pm(m-1)}{m-2}$, $t_1=1$, $t_2=\dfrac{m}{2-m}$. Pentru că $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ rezultă $t\in(0,1)$ așa că este acceptabilă numai rădăcina t_2 dacă $0<m<1$. 3°. Pentru $m=\sqrt{3}-1$ $t=\dfrac{\sqrt{3}-1}{3-\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; $x=60°$. ● **20.** 1°. Avem $\widehat{ACI}=\pi-\hat{C}$; $\widehat{AIC}=\hat{C}-\hat{B}$; $\widehat{CAI}=\hat{B}$ așa că $AI=AC\dfrac{\sin\widehat{ACI}}{\sin\widehat{AIC}}=\dfrac{2R\sin\hat{B}\sin\hat{C}}{\sin(\hat{C}-\hat{B})}$.

2°. Bisectoarea unghiului AIC întîlnește raza OA a cercului dat în O_1, care este centrul cercului tangent în A la cercul dat și la dreapta BC. Al doilea centru se obține la intersecția lui OA cu bisectoarea exterioară a unghiului AIC.

$$R_1=AI\operatorname{tg}\widehat{AIO_1}=2R\frac{\sin B\sin C}{\sin(C-B)}\operatorname{tg}\frac{C-B}{2}=R\frac{\sin B\sin C}{\cos^2\dfrac{C-B}{2}}$$

$$R_2=AI\operatorname{tg}\widehat{AIO_2}=2R\frac{\sin B\sin C}{\sin(C-B)\operatorname{tg}\dfrac{C-B}{2}}=R\frac{\sin B\sin C}{\sin^2\dfrac{C-B}{2}}$$

3°. $\dfrac{1}{m}=\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}=\dfrac{\cos^2\dfrac{C-B}{2}+\sin^2\dfrac{C-B}{2}}{R\sin B\sin C}$ sau $\dfrac{2m}{R}=2\sin B\sin C=\cos(C-B)-\cos(C+B)=\cos(C-B)+\cos A$. Cunoaștem suma și aceas-

tă ultimă relație ne definește diferența unghiurilor C și B. Trebuie să avem $-1<\cos(C-B)=\frac{2m}{R}-\cos A<1$. Cum $m>0$, cînd $0<m<R\cos^2\frac{A}{2}$ avem soluție unică. ● **21.** 1°. Prin rotația figurii în jurul diametrului AB se generează un trunchi de con și o calotă sferică. Trunchiul de con este generat de trapezul $ATMH$ iar calota de arcul MB. Avem $HB=OB-OH=a-a\cos 2\varphi$ și $HM=a\sin 2\varphi$ iar $AH=a+a\cos 2\varphi=$ $=a(1+\cos 2\varphi)=2a\cos^2\varphi\cdot AM=2AP=2a\cos\varphi$; $OP=a\sin\varphi$ iar $OA^2=$ $=OP\times OT$ deci $OT=\frac{a}{\sin\varphi}$; $AT^2=OT\times PT=\frac{a}{\sin\varphi}\left(\frac{a}{\sin\varphi}-a\sin\varphi\right)=$ $=a^2\operatorname{ctg}^2\varphi$ și aria căutată este (Fig. 4.21 a):

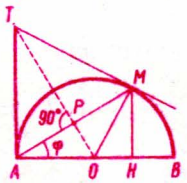


Fig. 4.21 a

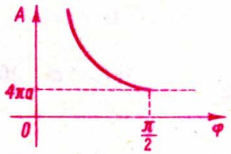


Fig. 4.21 b

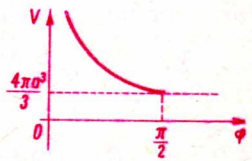


Fig. 4.21 c

$$A_t=\pi AT^2+\pi TM(AT+MH)+2\pi OM\times HB=2\pi a^2\frac{1+\sin^4\varphi}{\sin^2\varphi}.$$

2°. Pentru că φ variază între 0 și $\frac{\pi}{2}$ obținem graficul cerut dacă am notat $u=\sin^2\varphi$ (Fig. 4.21 b). 3°. Volumul căutat este dat de formula

$$V=\frac{\pi AH}{3}[AT^2+HM^2+AT\times HM]+\frac{2\pi HM\times OM^2}{3}-\frac{\pi HM^2}{2}\times OH=$$

$$=\frac{2\pi a^3}{3}\frac{1+\sin^4\varphi}{\sin^2\varphi}$$

cînd $\varphi=0$, $V\to+\infty$; cînd $\varphi=\frac{\pi}{2}$, $V=\frac{4\pi a^3}{3}$. Din derivată rezultă că V ar-

un minim cînd $\varphi=\frac{\pi}{2}$ (Fig. 4.21 c). ● **22.** 1°. Din relația (1), cum $A+B+C=\pi$, rezultă

$$-2\operatorname{tg}(B+C)=-2\frac{\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C}{1-\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C}=\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C.$$

Din $\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C=0$, ar rezulta $B+C=\pi$, ceea ce nu se poate, așa că obținem (2). Reciproc, presupunînd că relația (2) este adevărată, avem

$$\operatorname{tg}(B+C)=\frac{\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C}{1-\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C}=\frac{\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C}{-2},$$

deci $\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C=-2\operatorname{tg}(B+C)=2\operatorname{tg}A$. Din (2), rezultă

$$3+1=\frac{\sin B\sin C}{\cos B\cos C}+1=\frac{\cos(B-C)}{\cos B\cos C};$$

deci $\cos(B-C)=4\cos B\cos C$. Dar din (1)

$$2\operatorname{tg}A=2\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\sin(B+C)}{\cos B\cos C}=\frac{\sin(\pi-A)}{\cos B\cos C}=\frac{\sin A}{\cos B\cos C},$$

deci $\cos A=2\cos B\cos C$ și din relația precedentă rezultă (3). Invers, din (3) avem $\cos B\cos C+\sin B\sin C=-2\cos(B+C)=-2\cos B\cos C+2\sin B\sin C$, deci $3\cos B\cos C=\sin B\sin C$, de unde rezultă relația (2). 2°. Din relațiile (1) și (2), rezultă că $\operatorname{tg}B$ și $\operatorname{tg}C$ sînt rădăcinile ecuației de gradul doi $x^2-2\operatorname{tg}A\cdot x+3=0$, deci trebuie să avem $\operatorname{tg}^2A\geqslant 3$. Cum $\operatorname{tg}A$ trebuie să fie pozitiv, căci altfel ecuația precedentă ar avea rădăcini negative, deci toate unghiurile triunghiului ar fi obtuze, rezultă $\frac{\pi}{3}<A<\frac{\pi}{2}$. Pentru limita inferioară, triunghiul este echilateral. 3°. Din teorema sinusului, avem $\frac{a}{\sin A}=\frac{b+c}{\sin B+\sin C}$ și apoi trecînd la arcele pe jumătate și simplificînd cu $\cos\frac{A}{2}$, avem

$$(b+c)\sin\frac{A}{2}=a\cos\frac{B-C}{2};$$

$$(b+c)^2\frac{1-\cos A}{2}=a^2\frac{1+\cos(B-C)}{2}=a^2\frac{1+2\cos A}{2}.$$

Deducem

$$\cos A = \frac{(b+c)^2 - a^2}{(b+c)^2 + 2a^2}.$$

Ținînd seama că $\frac{\pi}{3} \leqslant A < \frac{\pi}{2}$, trebuie ca $b+c>a$ și $(b+c)^2+2a^2>2(b+c)^2-2a^2$, deci $2a>b+c$. Pentru $a=b+c$ triunghiul nu există, iar pentru $2a=b+c$, triunghiul este echilateral. 4°. Avem $y=\cos B+\cos C=2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}=2\cos\frac{\pi-A}{2}\sqrt{\frac{1+\cos(B-C)}{2}}$ și exprimînd totul cu $\sin\frac{A}{2}$, avem

$$y=\sqrt{2}\sin\frac{A}{2}\cdot\sqrt{3-4\sin^2\frac{A}{2}}.$$

Ținînd seama de valorile între care variază unghiul A, sinusul jumătății lui, variază între $\frac{1}{\sqrt{2}}$ și $\frac{1}{2}$. La capetele intervalului avem $y=1$. Funcția crește pînă la valoarea $3/\sqrt{8}$ și apoi descrește. Maximul are loc pentru

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{3}{8}}.$$

● **23.** Fiind dat triunghiul ABC (Fig. 4.23), notăm cu M și K proiecțiile lui O și C pe AB. Avem: $KC=OM$ și ortocentrul H este punctul de pe înălțimea KC astfel ca $CH=2\cdot OM=2\cdot KC$, unghiul BCA este totdeauna obtuz și unghiurile ascuțite $\widehat{BAC}$, $\widehat{KHB}$ care au laturile respectiv perpendiculare, sînt egale. Avem deci $\frac{CK}{HK}=\frac{1}{3}$ sau $\frac{CK}{KB}=\operatorname{tg}B$ și $\frac{KB}{HK}=\operatorname{tg}A$, deci $\frac{CK}{HK}=\frac{CK}{KB}\cdot\frac{KB}{HK}=\operatorname{tg}A\cdot\operatorname{tg}B=\frac{1}{3}$. Reciproc, dacă $\frac{CK}{KB}\cdot\frac{KB}{HK}=\operatorname{tg}A\cdot\operatorname{tg}B=\frac{1}{3}$ sau $\frac{CK}{HK}=\frac{1}{3}$ avem $CH=2\cdot KC$ și prin urmare $2\cdot OM=CH=2\cdot KC$ de unde $OM=KC$ și latura AB trece prin mijlocul razei OC. 2°. Fie $\sphericalangle AMC=\varphi$ unghiul dat. Rela-

ția $BM=MA$ sau $BK-MK=MK+KA$ ne dă $\frac{BK}{KC}-\frac{KA}{KC}=\frac{2MK}{KC}$ sau $\frac{1}{\operatorname{tg}B}-\frac{1}{\operatorname{tg}A}=\frac{2}{\operatorname{tg}\varphi}=\frac{\operatorname{tg}A-\operatorname{tg}B}{\operatorname{tg}A\cdot\operatorname{tg}B}$ și înlocuind $\operatorname{tg}A\cdot\operatorname{tg}B=\frac{1}{3}$ obținem $\operatorname{tg}A-\operatorname{tg}B=\frac{2}{3\operatorname{tg}\varphi}$. Din relația $(\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B)^2=(\operatorname{tg}A-\operatorname{tg}B)^2+4\operatorname{tg}A\cdot\operatorname{tg}B$ obținem $\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{2\sin^2\varphi+1}}{\sin\varphi}$ și apoi $\operatorname{tg}A=\frac{\sqrt{1+2\sin^2\varphi}+\cos\varphi}{3\sin\varphi}$, $\operatorname{tg}B=\frac{\sqrt{1+2\sin^2\varphi}-\cos\varphi}{3\sin\varphi}$. Problema este totdeauna posibilă și are soluție unică dacă considerăm $A>B$.

● **24.** 1° Notăm $OB=R$; $AB=R\sin\alpha=BF=AP$; $\triangle OAB=\triangle OAC=\triangle BMF$ pentru că $\begin{cases}BM=AC=OB=R\\ \widehat{BMF}=\widehat{OAC}=\widehat{BOA}=\alpha\end{cases}$

$OA=MF=R\cos\alpha$ Fig. (4.24,a)

$$V=\frac{\pi\cdot AP}{3}(AB^2+MP^2+AB\cdot MP)=$$

$$=\frac{\pi\cdot R\sin\alpha}{3}[R^2\sin^2\alpha+R^2(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+R^2\sin\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)],$$

$$V=\frac{\pi R^3\sin\alpha}{3}(3\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+3\sin\alpha\cos\alpha).$$

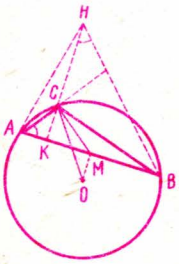


Fig. 4.23

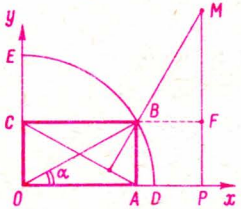


Fig. 4.24 a

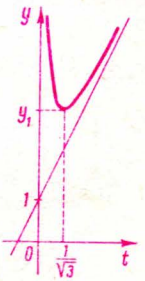


Fig. 4.24 b

$$V_1=\pi\cdot AB^2\cdot OA-\frac{\pi\cdot OC^2\cdot OA}{3}=\frac{2\pi}{3}AB^2\cdot OA=\frac{2}{3}R^3\sin^2\alpha\cos\alpha.$$

2° $\dfrac{V}{V_1}=\dfrac{3\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+3\sin\alpha\cos\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}$ sau $\dfrac{V}{V_1}=\dfrac{3\operatorname{tg}^2\alpha+1+3\operatorname{tg}\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha}$

sau și $\dfrac{V}{V_1}=\dfrac{3t^2+3t+1}{2t}$ dacă $\operatorname{tg}\alpha=t$. Cînd α variază de la 0 la $\dfrac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha=t$ variază de la 0 la $+\infty$. Pentru $t=0$, $y=\infty$. Pentru $t=\infty$, $y=\infty$.

Derivata $y'=\dfrac{3t^2-1}{2t^2}$; $t'=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

α	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
y'	∞	$-$	0	$+$	$\frac{3}{2}$
y	∞	$\searrow$	$y_{1\,\min}$	$\nearrow$	∞

Asimptotă oblică este dreapta $y=\dfrac{3}{2}(t+1)$, $y_{min}=\dfrac{3+2\sqrt{3}}{2}\simeq 3{,}232$ (Fig. 4.24, b). 3° Calculînd coordonatele lui M avem $x=OP=R(\cos\alpha+\sin\alpha)$. $y=MP=R(\cos\alpha+\sin\alpha)$ rezultă că locul geometric al punctului M este pe bisectoarea unghiului xOy și dacă α crește de la 0 la $\dfrac{\pi}{4}$ sau descrește de la $\dfrac{\pi}{2}$ la $\dfrac{\pi}{4}$, distanța OM crește de la $R\sqrt{2}$ la $2R$.

● **25.** 1° $0=(-1)^k\arcsin\dfrac{6z^2}{\sqrt{9z^2+1}}+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3z}+k\pi$

a) $z=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; $0=(-1)^k\cdot\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{6}+k\pi$

$z=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; $0=(-1)^k\cdot\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{6}+k\pi$

b) Ecuația are soluții dacă $z\in\left[-\frac{1}{\sqrt{3}};0\right)\cup\left(0;\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$

2° $$z_{12}=\frac{3\sin\theta\pm\sqrt{9\sin^2\theta-21\cos\theta}}{12}$$

a) $\theta=\pm\arccos\frac{1}{3}+2k\pi$. b) $\cos\theta>\frac{1}{3}$. c) $\cos\theta<\frac{1}{3}$.

Peste tot $k\in\mathbf{Z}$

● **26.** 1° $$1+\frac{p}{\sqrt{3}}-q=0$$

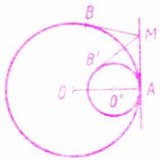
2° $$z^2-\frac{2p(q-1)}{(q+1)^2-p^2}z+\frac{4q}{(q+1)^2-p^2}=0.$$

● **27.** 1° Avem $\operatorname{tg}\frac{\widehat{AMB}}{2}=\frac{OA}{MA}=\frac{R}{x}$ și $\operatorname{tg}\frac{\widehat{AMB'}}{2}=\frac{O'A}{MA}=\frac{R'}{x}$

(Fig. 4.27, a, 4.27, b). Cum $\widehat{B'MB}=\widehat{AMB}=\widehat{AMB'}$, avem

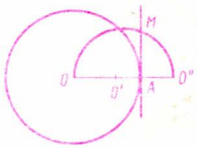
$$\operatorname{tg}\frac{\widehat{B'MB}}{2}=\operatorname{tg}\left(\frac{\widehat{AMB}}{2}-\frac{\widehat{AMB'}}{2}\right)=\frac{\frac{R}{x}-\frac{R'}{x}}{1+\frac{RR'}{x^2}}=\frac{x(R-R')}{x^2+RR'}.$$

2° Fie $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{x(R-R')}{x^2+RR'}$ sau $x^2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}-(R-R')x+RR'\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=0$, ecuație care ne dă $x=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\left[(R-R')\pm\sqrt{(R-R')^2-4RR'\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}\right]$. Cum



a.

Fig. 4.27 a



b.

Fig. 4.27 b

$RR'>0$ ele sînt de același semn dacă $\dfrac{R-R'}{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}>0$, α fiind inferior lui π.

Avem deci două soluții, cu condiția ca rădăcinile să fie reale, adică

$\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\leqslant\dfrac{R-R'}{2\sqrt{RR'}}$. 3°. Derivata lui $\operatorname{tg}\dfrac{\widehat{B'MB}}{2}$ este

$$\frac{(R-R')(x^2+RR')-2x^2(R-R')}{(x^2+RR')^2}=\frac{(R-R')(RR'-x^2)}{(x^2+RR')^2}.$$

Dacă x crește de la 0 la $+\infty$, această derivată se anulează pentru $x=\sqrt{RR'}$. Avem un maxim care va fi

$$\operatorname{tg}\frac{\widehat{B'MB}}{2}=\frac{\sqrt{RR'}(R-R')}{RR'+RR'}=\frac{R-R'}{2\sqrt{RR'}}.$$

Pentru construcția punctului M, prelungim $OO'A$ cu $AO''=AO'$ și trasăm semicercul pe diametrul OO''. Acesta taie tangenta în A în punctul M. Avem $AM^2=OA\cdot AO''=RR'$ deci $AM=x=\sqrt{RR'}$. ● **28.** 1° Se calculează $\Delta=-1+\sqrt{3}+(7-4\sqrt{3})\cos^2\varphi$ deci, $\Delta>0$ pentru orice $\varphi\in\mathbb{R}$. Considerînd $x'=0$ rezultă $P=0$ și $\cos\varphi=\pm\dfrac{1}{2}$ ecuație care ne dă

$$\varphi\in\left\{\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi\right\}\cup\left\{\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right\}\quad k\in\mathbf{Z}$$

2° Cum $S=2\sin\varphi$ rezultă $\sin\varphi=\dfrac{S}{2}$ și $\cos^2\varphi=1-\dfrac{S^2}{4}$. Înlocuind această valoare în $P=(2-\sqrt{3})(1-4\cos^2\varphi)$ obținem $(2-\sqrt{3})S^2-P-3(2-\sqrt{3})=0$ sau

$$(2-\sqrt{3})(x'^2+x''^2)+(3-2\sqrt{3})x'x''-3(2-\sqrt{3})=0.$$

3° (Fig. 4.28) $OA=x'$; $OB=x''$; $BB'=OB\cdot\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{x''}{2}$; $OB'=$

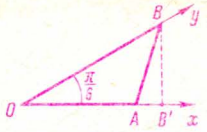


Fig. 4.28

$$=OB\cos\frac{\pi}{6}=\frac{x''\sqrt{3}}{2};\ AB'=OB'-OA=\frac{x''\sqrt{3}}{2}-x'=\frac{x''\sqrt{3}-2x'}{2}.$$

Din triunghiul dreptunghic ABB' avem

$AB^2=AB'^2+BB'^2=(x'+x'')^2-(2+\sqrt{3})\,x'x''=4\sin^2\varphi-(2+\sqrt{3})\cdot$
$\cdot(2-\sqrt{3})\cdot(1-4\cos^2\varphi)=4\,(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)-1=3$, deci $AB=\sqrt{3}$.

29. 1° Din formulele care dau tangentele jumătăţii unghiurilor în funcţie de laturi, găsim

$$A=28°57'18'',09,\qquad B=46°31'2'',87,\qquad C=104°28'39''.$$

2° Ţinînd seama că $A+C=\pi-B$ şi calculînd diferenţa $C-A$ din formula tangentei, găsim

$$C=104°28'39'',\qquad A=28°57'18'',07,\quad b=3\text{ cm}.$$

3° Unghiul A rezultă imediat. Pentru laturi se utilizează teorema sinusului. Avem

$$A=28°57'18'',13,\quad b=3\text{ cm},\quad c=4\text{ cm}.$$

4° După cum se va vedea şi în următoarele două cazuri, putem avea două soluţii, una, sau nici una. Teorema sinusului dă unghiul C, dar poate corespunde şi suplimentul lui. Din

$\sin C=\dfrac{c\sin A}{a}$ avem $C'=75°31'20'',97$ şi $C''=180°-C'=104°28'39'',03$

Rezultă apoi

$$B'=75°31'20'',94\ \text{şi}\ B''=46°34'2'',91.$$

Din teorema sinusului găsim $b'=4$ cm, $b''=3$ cm.
5° Avem

$$\sin C=\frac{c\sin A}{a}=1{,}936>1,$$

deci imposibil.
6° Găsim

$C'=22°47'11'',4$, $C''=157°12'48'',6$, $B'=128°15'30'',8$, $b=8{,}1098$ cm.

A doua valoare pentru C nu corespunde, căci $A+C''>180°$.

● **30.** 1° Relația $2a^2=b^2+c^2$ ne arată că triunghiul ABC are unghiurile ascuțite. Notînd cu M mijlocul lui BC, avem: $AB^2+AC^2=2AM^2+2MB^2$ (1), dar din enunț avem că $AB^2+AC^2=8\cdot MB^2$ (2). Din (1) și (2) rezultă $AM^2=3MB^2$ și $AM=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Vîrful A se deplasează pe un cerc care are ca centru punctul M și ca rază $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ (Fig. 4.30). 2° Fie $I=AM\cap B'C'$. Pentru a arăta că patrulaterul $AB'GC'$ este inscriptibil, se arată că avem $AI\cdot IG=C'I\cdot IB'=IB'^2=\frac{MC^2}{4}=\frac{a^2}{16}$. 3° Avem $MG=\frac{1}{3}MA=\frac{a\sqrt{3}}{6}$ deci $MG\cdot MA=\frac{MA^2}{3}=\frac{a^2}{4}=MB^2=MC^2$, urmează că cercurile ABG, ACG sînt tangente în B și C la latura BC. 4° Fie D și D' picioarele bisectoarelor unghiului A. Punctele B și C sînt conjugate armonic în raport cu D și D' deci $MD\cdot MD'=MC^2=MG\cdot MA$ și în concluzie cercul ADD' trece de asemenea prin G. 5° Medianele fiind m_a, m_b, m_c se exprimă în funcție de laturi conform teoremei medianei, se adună membru cu membru și ținîndu-se cont de relația din enunț, se obține $m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{9a^2}{4}=$ =const. 6° În triunghiul ABC se exprimă $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ și $\sin A=\frac{4S}{2bc}$ de unde, ținînd seama și de relația din enunț, se obține

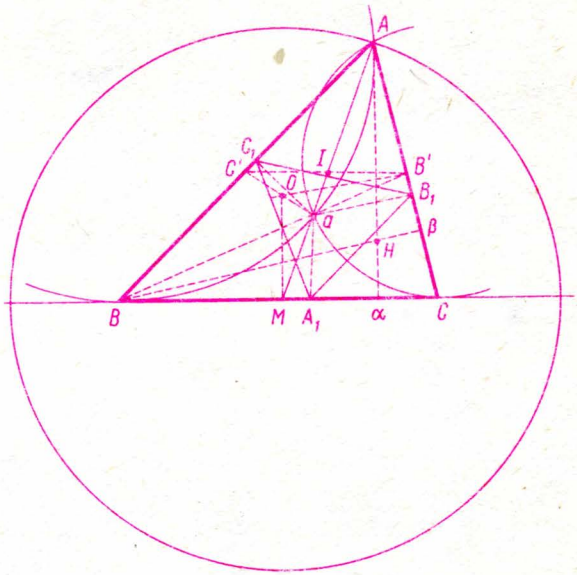


Fig. 4.30

$\operatorname{ctg} A = \dfrac{a^2}{4S}$ și în continuare $\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C = \dfrac{2a^2}{4S} = 2 \operatorname{ctg} A$. 7° Avem $2a^2 \operatorname{ctg}^2 A = b^2 \operatorname{ctg}^2 B + c^2 \operatorname{ctg}^2 C$ și cum $\operatorname{ctg} A = \dfrac{a^2}{4S}$ iar $\operatorname{ctg} B = \dfrac{2c^2 - a^2}{4S}$ și $\operatorname{ctg} C = \dfrac{2b^2 - a^2}{4S}$ rămîne să arătăm că $2a^6 = b^2(2c^2 - a^2)^2 + c^2(2b^2 - a^2)^2$.

8° Într-un triunghi oarecare ABC cu ortocentrul H să arătăm că avem: $AH^2 + BC^2 = BH^2 + CA^2 = CH^2 + AB^2 = 4R^2$ unde R este raza cercului circumscris de centru O. În triunghiul dreptunghic OMB, unde $OM = \dfrac{AH}{2}$ avem $OM^2 + MB^2 = R^2$ de unde $AH^2 + BC^2 = 4R^2$ și în mod analog $BH^2 + CA^2 = 4R^2 = CH^2 + AB^2$. Apoi $2AH^2 +$

$+2a^2=BH^2+b^2+CH^2+c^2=BH^2+CH^2+b^2+c^2$ și $2a^2=b^2+c^2$. Avem $2AH^2=BH^2+CH^2$. 9° Formula $S=\frac{a^2}{4\operatorname{ctg}A}$ se deduce din relația 6°. Avem și $2S=bc\sin A$ sau $4S^2=b^2c^2\sin^2 A$ și $b^2c^2=\frac{4S^2}{\sin^2 A}=4S^2(1+$ $+\operatorname{ctg}^2 A)$ în care înlocuind $\operatorname{ctg}^2 A=\frac{a^2}{16S^2}$ obținem $b^2c^2=4S^2+\frac{a^4}{4}$ și prin urmare $S=\frac{1}{4}\sqrt{4b^2c^2-a^4}$. 10° Notînd cu α, β, γ picioarele înălțimilor triunghiului ABC, avem $AH\cdot h_a+BH\cdot h_b+CH\cdot h_c=AH(AH+$ $+H\alpha)+BH\cdot(BH+H\beta)+CH\ (CH+H\gamma)=AH^2+BH^2+CH^2+AH\cdot$ $\cdot H\alpha+BH\cdot H\beta+CH\cdot H\gamma$. Ținînd seama că patrulaterele $B\alpha\beta A$ și $B\gamma\beta C$ sînt inscriptibile, vom avea $AH\cdot H\alpha=BH\cdot H\beta=CH\cdot H\gamma$ sau, ținînd seama de rezultatul de la punctul 8°, $AH\cdot h_a+BH\cdot h_b+CH\cdot h_c=$ $=3\cdot AH^2+3AH\cdot H\alpha=3AH\cdot A\alpha=3A\beta\cdot AC$ deoarece patrulaterul $\alpha H\beta C$ este inscriptibil. $A\beta\cdot AC=bc\cos A$ în care înlocuind $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=$ $=\frac{a^2}{2bc}$ vom avea $3A\beta\cdot AC=\frac{3}{2}a^2$. Aceasta fiind valoarea sumei $AH\cdot$ $\cdot h_a+bH\cdot h_b+CH\cdot h_c$ rezultă că suma este constantă. 11°. Avem $GA_1=$ $=\frac{h_a}{3}=\frac{2S}{3a}$ și analog $GB_1=\frac{2S}{3b}$ și $GC_1=\frac{2S}{3c}$. Aria S_1 a triunghiului $A_1B_1C_1$ este suma ariilor triunghiurilor GA_1B_1, GB_1C_1 și GC_1A_1 și prin urmare $S_1=\frac{1}{2}(GA_1\cdot GB_1\sin C+GB_1\cdot GC_1\sin A+GC_1\cdot GA_1\sin B)$ și cum $\sin A=$ $=\frac{2S}{bc}$; $\sin B=\frac{2S}{ac}$; $\sin C=\frac{2S}{ab}$ deducem $S_1=\frac{4S^3}{3b^2c^2}$. Triunghiul $A_1B_1C_1$ este înscris în cercul de diametru GC: avem deci $A_1B_1=GC\cdot\sin C$ și analog, $A_1C_1=GB\sin B$; $B_1C_1=GA\sin A$, ori noi am văzut că cercul cu diametrul DD' trece prin G, prin urmare locul punctelor al căror raport al distanțelor la B și C este $\frac{AB}{AC}$, trece prin G și avem $\frac{GB}{GC}=$ $=\frac{AB}{AC}$. Deducem că

$$\frac{A_1B_1}{A_1C_1}=\frac{GC\cdot\sin C}{GB\cdot\sin B}=\frac{AC\sin C}{AB\sin B}=\frac{AC}{AB}\cdot\frac{AB}{AC}=1$$

ceea ce ne arată că triunghiul $B_1A_1C_1$ este isoscel deoarece laturile $A_1B_1=A_1C_1$. În concluzie, vom avea $GC=\frac{2}{3}m_c$, $GB=\frac{2}{3}m_b$, $GA=\frac{2}{3}m_a$ și $m_c=\frac{b\sqrt{3}}{2}$, $m_b=\frac{c\sqrt{3}}{2}$, $m_a=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ și $A_1B_1=\frac{\sqrt{3}}{3}b\sin C$; $A_1C_1=\frac{\sqrt{3}}{3}c\sin B$; $B_1C_1=\frac{\sqrt{3}}{3}a\sin A$. Înlocuind $\sin C$, $\sin B$, $\sin A$ din relațiile $2S=ab\sin C=cb\sin A=ac\sin B$ obținem în final $A_1B_1=\frac{2S}{a\sqrt{3}}$; $A_1C_1=\frac{2S}{a\sqrt{3}}$; $B_1C_1=\frac{2aS}{bc\sqrt{3}}$. ● **31.** 1° Funcțiile trigonometrice din prima relație le exprimăm cu ajutorul tangentei unghiului pe jumătate și obținem, dacă notăm $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=t$; $\frac{1+t^2}{2t}=\frac{A}{t}+B\frac{1-t^2}{2t}$ deci $1+t^2=2A+B(1-t^2)$ așa că $(B+1)t^2+1-A-2B\equiv 0$, $B=-1$; $A=1$. În a doua relație facem $\operatorname{tg}\alpha=t$; $t=\frac{C}{t}+D\frac{1-t^2}{2t}$ sau $2t^2=2C+D(1-t^2)$; $t^2(2+D)-(2C+D)=0$, $D=-2$, $C=1$. 2° Folosind prima dintre identități putem scrie: $S_1=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}2\alpha+\ldots+\operatorname{ctg}2^{n-1}\alpha-(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}2\alpha+\ldots+\operatorname{ctg}2^{n-1}\alpha+\operatorname{ctg}2^n\alpha)=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{ctg}2^n\alpha$. Folosind a doua identitate deducem: $S_2=\operatorname{ctg}\alpha+\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2^2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2^n}-2\left(\operatorname{ctg}2\alpha+\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\alpha+\ldots+\frac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2^{n-1}}\right)=\frac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2^n}-2\operatorname{ctg}2\alpha$. 3° Dacă un arc al cercului trigonometric se împarte în k părți egale și facem ca numărul k să tindă către infinit, putem scrie $\frac{k\frac{\alpha}{k}}{k\sin\frac{\alpha}{k}}=$

$\frac{\alpha}{k\sin\frac{\alpha}{k}}$, dar ținînd seama că avem $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{\frac{\alpha}{k}}{\sin\frac{\alpha}{k}}=1$ și deci $a=2^n\sin\frac{a}{2^n}$.

4° Avem $\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=2^2\sin\frac{\alpha}{2^2}\cos\frac{\alpha}{2^2}\cos\frac{\alpha}{2}=$

$=2^3\sin\frac{\alpha}{2^3}\cos\frac{\alpha}{2^3}\cos\frac{\alpha}{2^2}\cos\frac{\alpha}{2}=\ldots=2^n\sin\frac{\alpha}{2^n}\cos\frac{\alpha}{2^n}\cos\frac{\alpha}{2^{n-1}}\ldots\cos\frac{\alpha}{2}$.

Ținînd seama că am arătat că $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\frac{\alpha}{2^n}=\alpha$ deducem

$$\lim_{n\to\infty}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2^2}\cos\frac{\alpha}{2^3}\ldots\cos\frac{\alpha}{2^{n-1}}\cos\frac{\alpha}{2^n}=\frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

● **32.** Unghiurile $\widehat{MNG}$ și $\widehat{ACB}$ sînt suplimentare și cum aria $MGN=\frac{GM\cdot GN\sin\widehat{MGN}}{2}$, aria $ABC=\frac{ab\sin C}{2}$, avem $\frac{\text{aria } MGN}{\text{aria } ABC}=\frac{GM\cdot GN}{ab}$. Dar $GM=\frac{1}{3}h_a=\frac{1}{3}\cdot\frac{2S}{a}$ și $GN=\frac{1}{3}h_b=\frac{1}{3}\cdot\frac{2S}{b}$, deci aria $MGN=\frac{4}{9}\cdot\frac{S^3}{a^2b^2}$. În mod analog, aria $NGP=\frac{4}{9}\cdot\frac{S^3}{b^2c^2}$ și aria $PGM=\frac{4}{9}\cdot\frac{S^3}{c^2a^2}$, deci

$$A_{MNP}=\frac{4}{9}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{a^2b^2c^2}\cdot S^3.$$

● **33.** 1°. I este punctul de intersecție al tangentelor comune a cîte două cercuri în punctele T_1, T_2, T_3 (Fig. 4.33). Distanțele de la punctul I la O_1O_2, O_2O_3, O_3O_1 sînt egale, ca tangente dintr-un punct exterior, deci $IT_1=IT_2=IT_3=x$. Se exprimă aria triunghiului $O_1O_2O_3$ ca suma ariilor triunghiurilor O_1IO_2, O_2IO_3, O_3IO_1 de unde se obține $x=\sqrt{\frac{R_1R_2R_3}{R_1+R_2+R_3}}$. Avem apoi $\operatorname{tg}\frac{\hat{O}_1}{2}=\frac{x}{R_1}$, $\operatorname{tg}\frac{\hat{O}_2}{2}=\frac{x}{R_2}$ și $\operatorname{tg}\frac{\hat{O}_3}{2}=\frac{x}{R_3}$ de unde rezultă unghiurile O_1, O_2, O_3. 2° Aria triunghiului curbiliniu este dată de aria $O_1O_2O_3$ din care se scade suma ariilor sectoarelor $T_1O_2T_2$, $T_2O_3T_3$, $T_3O_1T_1$. 3° Avem $x=1$ cm, $\hat{O}_1=90°$, $\hat{O}_2=53°7'48'',4$, $\hat{O}_3=36°52'11'',6$, $S\simeq0{,}465\text{cm}^2$. ● **34.** 1° Centrul I_1 este intersecția bisectoa-

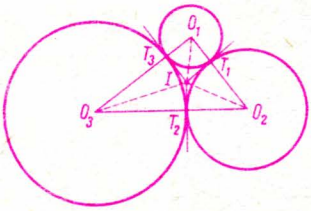


Fig. 4.33

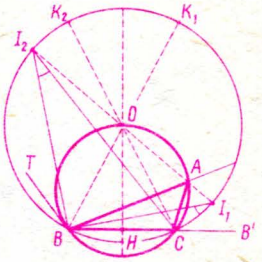


Fig. 4.34

relor BI_1 și CI_1 ale unghiurilor B și $\widehat{ACB'}$ (Fig. 4.34). Avem deci $\widehat{CBI_1}=\frac{\hat{B}}{2}$ și $\widehat{BCI_1}=\pi-\widehat{B'CI_1}=\frac{\pi+C}{2}$. Din triunghiul BCI_1 deducem $\widehat{BI_1C}=\pi-\widehat{CBI_1}-\widehat{BCI_1}=\frac{\hat{A}}{2}$ și de asemenea din triunghiul BCI_2 deducem $\widehat{BI_2C}=\pi-\widehat{BCI_2}-\widehat{CBI_2}=\frac{\hat{A}}{2}$. Rezultă că locul lui I_2 (ca și al lui I_1 pentru care aplicăm același raționament) este arcul, capabil de unghiul $\frac{\hat{A}}{2}$, care trece prin B și C și al cărui centru O este la intersecția arcului capabil de unghiul A care trece prin B și C și mediatoarea segmentului BC. Cînd A se deplasează din C în B, I_1 se deplasează pe locul său geometric din C în K_1, la intersecția acestuia cu bisectoarea BOK_1 a unghiului $\widehat{CBT}$ a laturii BC cu tangenta BT în B. Locul geometric al punctului I_2 este simetric cu cel precedent. 2° Unghiul $\widehat{CBI_1}=\frac{\hat{B}}{2}$ înscris în cercul (O) este jumătatea unghiului la centru $\widehat{COI_1}$ deci $\frac{\widehat{COI_1}}{2}=\frac{\hat{B}}{2}$ și pe de altă parte $\widehat{COB}=\hat{A}$, așa că $\widehat{COH}=\frac{\hat{A}}{2}$ și $OC=\frac{HC}{\sin\widehat{COH}}=\frac{a}{2\sin\frac{A}{2}}$

(unde H este mijlocul lui BC). Din triunghiul COI_1 deducem $CI_1 = 2 \cdot OC \cdot \sin \frac{\widehat{COI_1}}{2} = \frac{a \sin \frac{B}{2}}{\sin \frac{A}{2}}$. Analog obținem $BI_2 = \frac{a \sin \frac{C}{2}}{\sin \frac{A}{2}}$ și $\widehat{I_1OI_2} = 2\pi - \widehat{BOC} - \widehat{COI_1} - \widehat{BOI_2} = 2\pi - A - B - C = \pi$, deci I_1, O, I_2 sînt coliniare și $I_1I_2 = 2 \cdot OI_1 = 2 \cdot OC = \frac{a}{\sin \frac{A}{2}}$. În triunghiul BCI_1 avem

$$\frac{BI_1}{\sin \widehat{BCI_1}} = \frac{BC}{\sin \widehat{BI_1C}}$$ de unde găsim

$$BI_1 = a \cdot \frac{\cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{A}{2}} \text{ și analog } CI_2 = a \cdot \frac{\cos \frac{B}{2}}{\sin \frac{A}{2}}.$$

Cum $BI_1 \cdot CI_2 = \frac{a^2}{\sin^2 \frac{A}{2}} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$ și

$$BC \cdot I_1I_2 + CI_1 \cdot BI_2 = \frac{a^2}{\sin^2 \frac{A}{2}} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

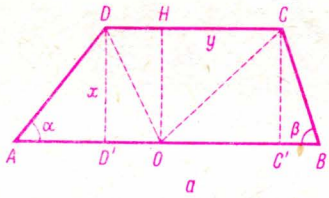
rezultă relația cerută, care este cea dată de teorema lui Ptolemeu pentru patrulatere inscriptibile. ● **35.** 1° Să notăm cu C' și D' proiecțiile punctelor C și D pe AB. (Fig. 4.35). Din triunghiurile dreptunghice ADD' și BCC', avem

$$AD = \frac{x}{\sin \alpha},\ AD' = \frac{x}{\operatorname{tg} \alpha},\ BC = \frac{x}{\sin \beta},\ BC' = \frac{x}{\operatorname{tg} \beta}.$$

Deducem

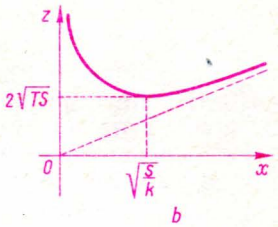
$$AB = y + \frac{x}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{x}{\operatorname{tg} \beta},\ S = \frac{x}{2}\left(2y + \frac{x}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{x}{\operatorname{tg} \beta}\right),\ z = AD + DC + CB =$$

$$= y + \frac{x}{\sin \alpha} + \frac{x}{\sin \beta}.$$



a

Fig. 4.35 a



b

Fig. 4.35 b

2° Eliminînd pe y din expresiile S și z, avem

$$z=\frac{S}{x}+\left[\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}+\frac{1}{\operatorname{tg}\beta}\right)\right]x=\frac{S}{x}+kx,$$

unde constanta k este expresia din paranteza mare. Pentru a construi curba reprezentativă a funcției z, observăm că $x\in(0,\infty)$, la capete x fiind infinit. Avem asimptota oblică $z=kx$ și un minim pentru $x=\sqrt{\frac{S}{k}}$. Derivata a doua este mereu pozitivă pentru x pozitiv. Graficul este dat în Fig. 4.35, b. 3° Pentru $x=\sqrt{\frac{S}{k}}$, găsim

$$zx=2S,\ \frac{z}{x}=2k,\ \frac{y}{x}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}.$$

Avem $\sphericalangle ADC=\pi-\alpha$, $\sphericalangle BCD=\pi-\beta$, deci $\sphericalangle ODH=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}$, $\sphericalangle OCH=\frac{\pi}{2}-\frac{\beta}{2}$. (Cu H am notat proiecția lui O pe DC). Din triunghiurile OHD și OHC avem $DH=OH\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ și $HC=OH\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$. Apoi $y=DH+HC=$ $=OH\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)=OH\frac{y}{x}$, deci $OH=x$. Prin urmare, punctul O este pe AB. Fiind pe bisectoarele unghiurilor din D și C el este centrul cercului tangent la laturile AD, DC și CB. ● **36.** 1° Locul geometric al punctelor egal depărtate de cele două cercuri este un cerc C concentric

cu cercurile date și cu raza $\frac{R+r}{2}$. Locul geometric al punctelor egal depărtate de două drepte paralele este o paralelă D cu ele, dusă la mijlocul distanței dintre ele. Dacă cercul C și dreapta D sînt secante avem două puncte care au această proprietate; dacă cercul este tangent la dreaptă avem un singur punct; cînd dreapta este exterioară cercului nu avem nici un punct care să aibă această proprietate. Cînd cele două drepte sînt concurente, locul geometric al punctelor egal depărtate de ele sînt cele două bisectoare ale lor. Dacă cercul C este secant la cele două bisectoare, avem patru puncte care se bucură de proprietatea cerută; putem avea deci 3 puncte, 2, unul sau nici unul. 2° Punctele egal depărtate de cele două cercuri se găsesc pe cilindrul cu generatoarele perpendiculare pe planul cercurilor și care are cercul cu raza $\frac{R+r}{2}$ ca și curbă directoare. Punctele egal depărtate de două drepte paralele, sînt așezate pe planul perpendicular pe planul celor două drepte și care trece prin dreapta echidistantă de ele. Punctele căutate sînt la intersecția cilindrului cu planul. Cînd dreptele sînt concurente, punctele egal depărtate de ele sînt așezate pe planele perpendiculare pe planul dreptelor și care trec prin bisectoarele dreptelor. Punctele căutate sînt la intersecția cilindrului cu cele două plane. Acest loc poate fi elipsă, două drepte paralele sau o dreaptă. 3° Locul geometric al punctelor al căror raport al distanțelor la două puncte fixe este constant, este o sferă, cu diametrul egal cu segmentul determinat de punctele conjugate armonic cu punctele A și B ● **37.** 1° Locul geometric căutat este un cerc concentric cu cel dat și cu raza dublă cu a acestuia. 2° Locul căutat este dreapta perpendiculară pe planul triunghiului și care trece prin centrul cercului circumscris triunghiului. 3° Se calculează cu teorema lui Pitagora distanța de la un vîrf al triunghiului pînă la punctul P și aceasta fiind o coardă a sferei, este media proporțională între diametrul sferei și proiecția ei pe diametrul ce trece prin P și O. Dacă R este raza sferei avem

$$R=\frac{AP^2}{2OP}=\frac{AO^2+OP^2}{2OP}.$$

● **38.** 1° Pentru că perpendiculara pe coardă, dusă din centrul sferei, împarte coarda și arcul subîntins de ea în două părți egale, segmentul care unește centrul sferei cu punctul prin care trec coardele, se vede sub un unghi drept. Locul căutat este sfera de diametru cît segmentul care unește centrul sferei cu punctul fix, dacă acesta este în interiorul ei sau pe sferă; dacă punctul este exterior sferei, locul este for-

mat de calota sferei cuprinsă în interiorul sferei date. 2° Locul este cercul mare al sferei al cărui plan este perpendicular pe direcția dreptei cu care sînt paralele coardele. 3° Locul căutat este o sferă concentrică cu cea dată și cu raza $R+d$, dacă $d>R$; dacă $d<R$, avem două sfere concentrice cu cea dată, una cu raza $R+d$ și alta cu raza $R-d$; cînd $d=R$, locul este format din sfera cu raza $R+d$ și centrul sferei date. 4° Locul căutat este o sferă, concentrică cu sfera dată și cu raza $\rho=\frac{R}{\sin\alpha}$. ● **39.** 1° Axul radical. 2° Planul radical. 3° Punctele căutate sînt la intersecția planului radical cu planul mediator al segmentului determinat ce dă cele două puncte; în general locul căutat este o dreaptă; poate fi un plan dacă planul mediator coincide cu planul radical și nici un punct dacă aceste plane sînt paralele 4° Locul geometric al punctelor de unde segmentul se vede sub un unghi drept este sfera care are acest segment ca diametru. Locul căutat este intersecția planului radical cu sfera deci este un cerc, un punct, sau nu există puncte care să aibă proprietatea cerută, după poziția planului radical față de sferă. 5° Locul căutat este la intersecția planului mediator al segmentului AB cu calota sferică ce reprezintă locul geometric al punctelor de unde segmentul format de centrele sferelor se vede sub unghiul α: în general este un arc de cerc, un punct, sau nu există puncte care au această proprietate. ● **40.** 1° Dreapta $\triangle$ descrie un plan Q, paralel cu planul P. Fie A_1 proiecția lui A pe planul Q. A_1, ca și A și B, este fix. Cum AA_1 este perpendiculară pe planul Q și AC este perpendiculară pe BC, din planul Q, pe baza unei reciproce a teoremei celor trei perpendiculare A_1C este perpendiculară pe BC. Cînd dreapta $\triangle$ variază, punctul C descrie cercul Γ din planul Q, cu diametrul BA_1. 2° Triunghiul ABC este dreptunghic în C, deci cercul lui circumscris are diametrul AB. Cînd $\triangle$ variază, acest cerc descrie sfera cu diametrul AB. 3° Mijlocul m a lui BC este omoteticul punctului C față de centrul de omotetie B, în raportul $\frac{1}{2}$, deci el descrie cercul Γ_1, omotetic în raportul $\frac{1}{2}$, față de B, al cercului Γ. 4° Centrul de greutate M al triunghiului ABC se găsește la $\frac{1}{3}$ de E din lungimea medianei EC, deci el este omoteticul punctului C față de punctul fix E, în raportul 1/3. Prin urmare, punctul M descrie un cerc într-un plan paralel cu Q și care taie pe BA la 2/3 din ea socotit din A. 5° Să presupunem că F este punctul de pe AB, așa ca $\alpha FB+\beta FA=0$, α și β fiind dați. F este fix și este centrul distanțelor proporționale la A și B afectate de coeficienții α, β. Centrul

G al distanțelor proporționale la A, B, C afectate de coeficienții α, β, γ este centrul distanțelor proporționale a punctelor F și C, afectate de coeficienții $\alpha+\beta$ și γ deci el este așa ca $(\alpha+\beta)GF+\gamma GC=0$, care se scrie

$$\frac{FG}{GC}=\frac{\gamma}{\alpha+\beta} \text{ sau } \frac{FG}{FC}=\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}.$$

Dacă $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$, punctul G descrie cercul omotetic al cercului Γ în raportul $\gamma/(\alpha+\beta+\gamma)$. Dacă $\alpha=\beta=\gamma$ se obține centrul de greutate al triunghiului ABC (4°). 6° Fie BD mediana vîrfului B din triunghiul ABC. Muchiile AC și BD a celor două conuri se taie în punctul D. Locul descris de acest punct va fi curba de intersecție a celor două conuri. Dar D este omoteticul lui C față de A, în raportul $\frac{1}{2}$, deci el descrie cercul Γ_1 cu diametrul ED_1. În plus, cele două conuri au în comun dreapta AB. Proiecția lui Γ_1 pe planul P este un cerc cu același diametru, căci Γ, este într-un plan paralel cu P. În plus, trebuie adăugată dreapta ab, proiecția lui AB. Planul care trece prin AB și este perpendicular pe planul P, este planul AA_1B. Proiecția căutată se compune din diametrul ED_1 și dreapta AB (fig. 4.40). ● **41.** 1° Să notăm cu O centrul cercului de bază al conului. Volumul tetraedrului $SABC=\frac{1}{3}SO\times$ aria ABC. Dacă M este mijlocul laturii BC atunci AM fiind mediană, bisectoare și înălțime, $AM=3\,MO=3r$ și teorema lui Pitagora ne permite

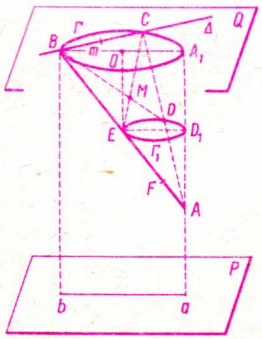


Fig. 4.40

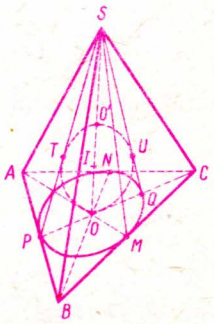


Fig. 4.41

calculul înălțimii tetraedrului $SO^2=SM^2-OM^2=3r^2-r^2=2r^2$ și $SO=r\sqrt{2}$. Cum $AM=\frac{AB\sqrt{3}}{2}$, obținem aria $ABC=3r\cdot r\sqrt{3}$ așa că volumul căutat este $V=\frac{1}{3}3r^3\sqrt{6}=r^3\sqrt{6}$. Aplicînd teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic SOA, deducem $SA^2=AO^2+OS^2=2r^2+4r^2=6r^2$ așa că $SA^2+SB^2=12r^2=(2r\sqrt{3})^2=AB^2$. Unghiul ASB este drept. Pentru că am presupus $SA=SB=SC$ rezultă că unghiurile BSC și CSA sînt și ele drepte, așa că triedrul $SABC$ este tridreptunghic. (Fig. 4.41). 2° Generatoarea conului, SM, este perpendiculară pe tangenta la cercul de bază, BC. Muchia SA' a triedrului suplimentar (A' este intersecția ei cu planul bazei) este perpendiculară pe planul BSC, deci perpendiculară și pe dreapta SM din acest plan așa că ea este generatoarea conului suplimentar conului dat, adică conului cu vîrful în S, cu axa OS și a cărui jumătate de unghi la vîrf este $\widehat{MSO}$. Planul MSA', trece prin două drepte perpendiculare pe dreapta BC, dreptele MS și SA', este perpendicular pe BC așa că taie planul triunghiului ABC după dreapta MOA' perpendiculară în M pe BC, și avem în triunghiul dreptunghic MSA' de înălțime SO, $SO^2=MO\cdot OA'$ și $OA'=\frac{SO^2}{MO}=\frac{2r^2}{r}=2r$. La fel se arată că $OB'=OC'=2r$, dacă B', C' sînt punctele unde perpendicularele la planele SAC, SAB, ridicate în S, întîlnesc planul ABC. Conul de rotație, cu vîrful în S, care este locul geometric al muchiilor SA', SB', SC', are ca bază cercul cu centrul în O și de rază $2r$. Volumul V' al acestui con este $V'=\frac{1}{3}\pi SO\times(2r)^2=\frac{4r^3}{3}\sqrt{2}$. Ne trebuie volumul cuprins între acest con și conul dat, deci

$$V'-V=\frac{4\pi r^3}{3}\sqrt{2}-\frac{\pi r^3}{3}\sqrt{2}=\pi r^3\sqrt{2}.$$

3° Ca să găsim raza sferei înscrisă în conul dat, tăiem conul cu un plan care trece prin SO și-l taie după generatoarele SP și SQ. PQ este diametrul cercului O, deci are lungimea $2r$. Acest plan taie sfera înscrisă în con după un cerc mare și avem 2 aria $SPQ=SO\cdot PQ=\rho(SP+SQ+PQ)=\rho(2r\sqrt{3}+2r)$ așa că $\rho=\frac{SO\cdot PQ}{2SP+PQ}=\frac{r\sqrt{2}\cdot 2r}{2r(\sqrt{3}+1)}=\frac{r\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}=$

$\frac{r\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{2}$. Dacă I este centrul sferei înscrisă în con și notăm cu T și U punctele cercului de contact dintre sferă și generatoarele SP și SQ și cu O' punctul diametral opus lui O în sferă, raportul ariilor celor două calote determinate de cercul de contact cu conul este

$$K=\frac{DO}{DO'}=\frac{SO}{SO'}=\frac{SO}{SO-2\rho}=\frac{r\sqrt{2}}{r\sqrt{2}-r\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}=2+\sqrt{3}\cong 3{,}732.$$

D este intersecția lui OO' cu TU, pentru că D și S sînt conjugate armonic față de OO'. ● **42.** 1° Dreapta AB înțeapă planul (P) în punctul fix C. Puterea punctului C față de sferă este $CT^2=CA\cdot CB=$const. Deci punctul de contact dintre sferă și planul (P), descrie un cerc Γ cu centrul în C și de rază CT. 2° Centrul sferei se găsește în planul mediator al segmentului AB și de asemenea pe normala în T la planul (P), așa că se găsește la intersecția cilindrului cu generatoarele perpendiculare pe planul (P) și directoarea (Γ), cu planul mediator al segmentului AB. Locul descris este deci o elipsă. 3° Planul mediator al segmentului AB se intersectează cu planul (P) după o dreaptă $(\triangle)$. Paralela dusă din C la $(\triangle)$ conține proiecția pe planul (P) a axei mici a elipsei. Perpendiculara dusă din C la $(\triangle)$ taie cercul descris de punctul T în două puncte T_1 și T_2. Segmentul T_1T_2 este proiecția axei mari a elipsei. În planul ACT_1 dacă ridicăm perpendiculara în T_1 pe planul (P), această perpendiculară întîlnește mediatoarea lui AB în centrul sferei care are raza minimă; perpendiculara ridicată în punctul T_2, întîlnește mediatoarea lui AB în centrul sferei de rază maximă. ● **43.** 1° Locul punctelor egal depărtate de cele două sfere este o sferă S concentrică cu ele și cu raza $\frac{R_1+R_2}{2}$. 2° Locul geometric este intersecția sferei S cu planul mediator al segmentului dat. 3°. Locul căutat este intersecția dreptei ce trece prin centrul cercului circumscris triunghiului ABC, perpendiculară pe planul triunghiului, cu sfera (S). Pot fi două puncte, un punct sau nici unul. 4° Înălțimea conului este R_1+R_2; condiția cerută $2R_1^2=R_2^2-R_1R_2$ diametrul bazei $2\sqrt{R_2^2-R_1^2}$ și conul este echilateral deci generatoarea este cît diametrul bazei. ● **44.** 1° Locul căutat este la intersecția sferei concentrice cu cea dată și cu raza $R_1\sqrt{2}$, cu elipsoidul de rotație în jurul liniei centrelor, cu focarele în O_1 și O_2. 2° Locul căutat este la intersecția sferei concentrice cu sfera dată și cu raza $R_2\sqrt{2}$, cu hiperboloidul de rotație, în jurul liniei centrelor sferelor, cu focarele în O_1 și O_2. 3° Locul căutat este la intersecția sferei cu diametrul cît segmentul

care unește punctele de pe linia centrelor ce împart segmentul O_1O_2 în raportul K, cu planul paralel cu planele date și echidistant de ele, cînd planele sînt paralele; cînd planele sînt concurente sfera trebuie întîlnită de planele bisectoare ale diedrelor formate. În cazul I avem un cerc, un punct sau nu avem nici un punct; în cazul al doilea putem avea două cercuri, un cerc și un punct, un cerc, două puncte, un punct sau nici un punct, după poziția planelor bisectoare ale diedrelor, față de sferă. ● **45.** 1° Locul geometric al punctelor din spațiu egal depărtate de cele două cercuri este format de suprafața laterală a unui cilindru de rotație, cu generatoarele perpendiculare pe planul (P) și avînd ca cerc director cercul concentric cu cele date și cu raza cît semisuma razelor. Locul geometric al punctelor în spațiu, egal depărtate de două plane, presupuse paralele, este un plan paralel cu planele date și dus la mijlocul distanței dintre ele. Prin urmare, locul căutat este intersecția cilindrului de rotație cu planul. În general este o elipsă; cînd planul este perpendicular pe generatoarele cilindrului, este un cerc; cînd planul este paralel cu o generatoare a cilindrului poate să nu întîlnească cilindrul, să fie tangent după o dreaptă, sau să taie cilindrul după două generatoare paralele. Dacă planele se presupun concurente, locul geometric al punctelor egal depărate de ele, este format din planele bisectoare ale diedrelor formate la intersecția lor. Locul căutat este format de intersecția cilindrului cu planele bisectoare. Cînd amîndouă planele bisectoare intersectează cilindrul avem, în general, două elipse sau o elipsă și un cerc; o elipsă și două drepte paralele; o elipsă și o generatoare a cilindrului sau numai o elipsă; drepte paralele în număr de 4,3,2,1 sau niciuna. 2° Locul geometric al punctelor egal depărtate cu distanța (d_1) de $(\triangle)$ este un cilindru de rotație în jurul lui $(\triangle)$, cu raza (d_1); punctele căutate sînt pe curba de intersecție dintre cei doi cilindri; cînd cei doi cilindri sînt tangenți avem un singur punct; cînd cei doi cilindri nu se întretaie, nu avem puncte care să satisfacă condițiile impuse. 3° Locul geometric al punctelor egal depărtate de sfera (Σ) cu distanța (d_2) este format din una sau două sfere concentrice cu (Σ) și avînd ca raze $R+d_2$ sau $R-d_2$; punctele căutate sînt la intersecția cilindrului cu sferele concentrice cu (Σ). Dacă sferele sînt exterioare cilindrului, nu avem puncte care satisfac condițiile impuse. ● **46.** 1° Din triunghiul ABA': $x=c\cos\hat{B}$ și cum $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$ rezultă

$$x=\frac{a^2+c^2-b^2}{2a} \text{ și analog } x'=\frac{a^2+b^2-c^2}{2a},\ y=\frac{a^2+b^2-c}{2b},$$

$$y'=\frac{b^2+c^2-a^2}{2b},\ z=\frac{b^2+c^2-a^2}{2c} \text{ și } z'=\frac{a^2+c^2-b^2}{2c} \text{ (Fig. 4.46). 2° Cum}$$

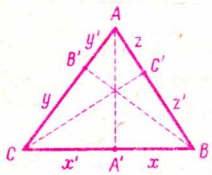


Fig. 4.46

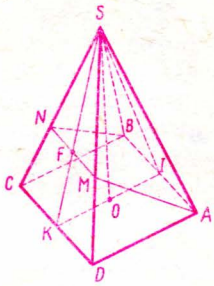


Fig. 4.47

$D^2=x^2+y^2+z^2$ și $D'^2=x'^2+y'^2+z'^2$ înlocuind obținem $D=D'$. 3° $2p=a+b+c$, $2P=4(x+y+z)$, $2P'=4(x'+y'+z')$, $S=2(xy+xz+yz)$ și $S'=2(x'y'+x'z'+y'z')$. Înlocuind valorile lor în relație aceasta va fi verificată. 4°. Vom obține: $x=27$; $x'=5$; $y=4$; $y'=36$, $z=30$; $z'=18$; $p=60$; $P=122$; $P'=118$; $S=2076$; $S'=1836$; $D^2=D'^2=1645$;

$$S-S'=p(P-P')=240. \quad \bullet$$

47. 1° Avem $KF=\dfrac{KH}{\cos \widehat{SKI}}=$

$=\dfrac{KI-HI}{\cos\alpha}=\dfrac{2a-x}{\cos\alpha}$; $KS=\dfrac{KO}{\cos\alpha}=\dfrac{a}{\cos\alpha}$; $SF=SK-FK=\dfrac{x-a}{\cos\alpha}$. Din asemănarea triunghiurilor SNM și SCD se obține (Fig. 4.47), $\dfrac{NM}{CD}=$

$=\dfrac{NM}{2a}=\dfrac{SF}{SK}=\dfrac{x-a}{\cos\alpha}$; $\dfrac{\cos\alpha}{a}=\dfrac{x-a}{a}$ așa că $NM=2(x-a)$. Triunghiul dreptunghic FHI arată că $FH=KH$ tg $\widehat{FKH}=(2a-x)$ tg α și

$$IF^2=IH^2+FH^2=x^2+(4a^2-4ax+x^2)\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{x^2+4a(a-x)\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}.$$

Aria $AMNB=\dfrac{(AB+MN)}{2}\,IF$, deci $y=\sum^2=\left[\left(\dfrac{AB+MN}{2}\right)IF\right]^2=$

$=\dfrac{x^2}{\cos^2\alpha}[x^2-4ax\sin^2\alpha+4a^2\sin^2\alpha]$; $y'=\dfrac{4x}{\cos^2\alpha}[x^2-3ax\sin^2\alpha+2a^2\sin^2\alpha]$.

Deci ca să avem un extrem trebuie ca $y'=0$; $x=0$ nu convine căci x variază numai de la a pînă la $2a$; trebuie ca $x^2-3ax\sin^2\alpha+2a^2\sin^2\alpha=0$.

Rădăcinile acestui trinom sînt reale dacă $0 \leq 9a^2 \sin^4 \alpha - 8a^2 \sin^2 \alpha = a^2 \sin^2 \alpha (9 \sin^2 \alpha - 8) = a^2 \sin^2 \alpha (1 - 9 \cos^2 \alpha)$ deci $\cos \alpha \leq \frac{1}{3}$. Pe de altă parte, dacă notăm $f(x) = x^2 - 3ax \sin^2 \alpha + 2a^2 \sin^2 \alpha$, atunci $f(2a) = 4a^2 \cos^2 \alpha > 0$ deci $2a$ este în afara rădăcinilor; ca să fie mai mare decît amîndouă, trebuie să fie mai mare decît semisuma lor deci $2a > \frac{3a \sin^2 \alpha}{2}$ sau $\sin^2 \alpha < \frac{1}{3}$ ceea ce evident este totdeauna adevărat. Avem $f(a) = a^2(1 - \sin^2 \alpha) = a^2 \cos^2 \alpha > 0$ și cum trebuie ca $a < \frac{3a \sin^2 \alpha}{2}$; $\cos \alpha < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Rădăcinile sînt $x = \frac{1}{2}[3a \sin^2 \alpha \pm \sqrt{a^2 \sin^2 \alpha (1 - 9 \cos^2 \alpha)}]$ și dacă ne folosim de $\operatorname{tg} \alpha = t$ putem scrie

$$\frac{2x}{a} = \frac{t}{1+t^2}(3t \pm \sqrt{t^2 - 8}).$$

Pentru că t este presupus întreg, $\frac{x}{a}$ va fi rațional cînd $t^2 - 8 = p^2$ sau $8 = t^2 - p^2 = (t+p)(t-p)$ dar $8 = 1 \times 8 = 2 \times 4$ și pentru că $t - p < t + p$ putem avea $t - p = 1$ sau 2; cînd $t - p = 1$, $t + p = 8$ și $t = \frac{8+1}{2}$ fracționar, deci neacceptabil; rămîne $t - p = 2$, $t + p = 4$; $t = 3$. Cînd $t = 3$, $y = x^2(10x^2 - 36ax + 36a^2)$. Avem un maxim cînd $\frac{x}{a} = \frac{6}{5}$ și are valoarea $y_1 = \frac{1296a^4}{125} \approx 10{,}37a^4$; cînd $\frac{x''}{a} = \frac{3}{2}$ avem un minim și avem valoarea $y_2 = \frac{81a^4}{8} \cong 10{,}13a^4$. 2° Dreapta SO înțeapă planele corespunzătoare maximului și minimului, notate cu (P') și (P'') $z' = OP_1$; $z'' = OP_2$. Din asemănarea triunghiurilor IOP și IHF avem $\frac{OP}{FH} = \frac{IO}{IH}$. $z = OP = FH \frac{IO}{IH} = \frac{a}{x}(2a - x)t = \frac{2a^2 t}{x} - at = 2a^2 t \frac{2(1+t^2)}{at(3t \pm \sqrt{t^2 - 8})} - at =$

$= \frac{a}{2}(l \mp \sqrt{l^2-8})$. Cînd $l=3$, $z'=a$; $z''=2a$. ● **48.** Ținînd seama de procedeele folosite în alte exerciții construcția celor trei centre nu prezintă dificultăți și rezultă din Fig. 4.48 a, b, c în care s-au considerat cele trei cazuri posibile. În a doua figură s-a luat $\beta=0$, iar în a treia $\alpha=\beta=0$. Menționăm că nu s-au figurat de fiecare dată, decît două, respectiv o singură soluție. Condiția de existență este în cele trei cazuri $2R_2+R_1+R_3 \geqslant O_1O_3$; $2R_2-R_1-R_3 \geqslant O_1O_3$; $2R_2-R_1+R_3 \geqslant O_1O_3$.

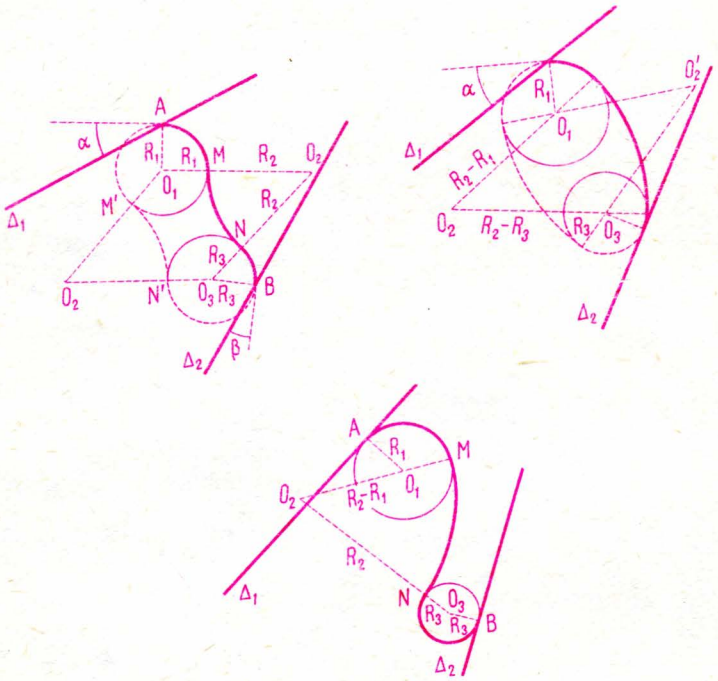
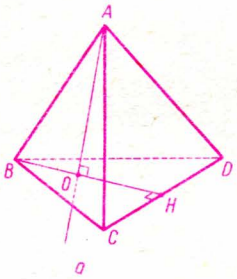


Fig. 4.48 a, b, c

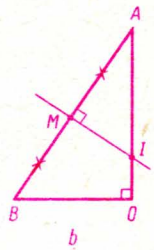
● **49.** 1° $BC=a \Rightarrow BH=\frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BO=\frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$. În triunghiul AOB, dreptunghic în O, avem (Fig. 4.49, a):

$$OA^2=AB^2-OB^2=a^2-\frac{3a^2}{9}=\frac{6a^2}{9},\ OA=\frac{a\sqrt{6}}{3}.$$



a

Fig. 4.49 a



b

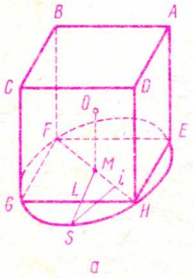
Fig. 4.49 b

2° Punctul I se află la intersecția axei de simetrie OA cu planul mediator P al lui AB. Pentru a-l determina, studiem intersecția lui P cu planul ABO care trece prin OA. Aceasta este mediatoarea laturii AB a triunghiului ABO; ea taie pe AO în I (fig. 4.49, b). Triunghiurile AIM și AOB sînt asemenea și

$$\frac{AI}{AB}=\frac{AM}{AO} \Rightarrow \frac{AI}{a}=\frac{a}{2}\cdot\frac{3}{a\sqrt{6}} \Rightarrow AI=\frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

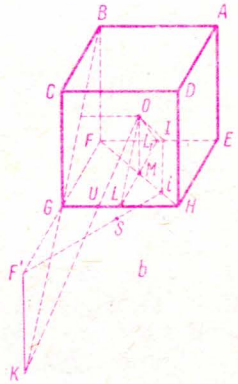
Se poate observa că $AI=\frac{3}{4}AO$. ● **50.** 1° Punctul S este la intersecția cercului $EFGH$ cu perpendiculara dusă din M pe GH, care trece prin mijlocul L al coardei GH. Cînd fața $EFGH$ este orizontală atunci planul (π) dus din S perpendicular pe MH este vertical; fie i punctul unde el taie pe MH. Triunghiul SiM este dreptunghic și isoscel deci $Mi=a$. Să notăm cu I proiecția lui O pe planul (π) dus prin S perpendicular pe FH atunci $OI=Mi=a$ așa că planul (π) este tangent la sfera (Σ) în punctul I și SI este tangenta căutată. Trasarea ei se face observînd că I este mijlocul segmentului determinat de dreptele FH și BD pe paralela dusă din i la dreapta DH (Fig. 4.50 a). 2° Notăm cu F' intersecția dreptelor GF și Si. Planul (π), paralel cu planul OMG și care

taie pe $BFGC$ după GC, taie această față după dreapta $F'K \| GC$ dusă prin F' așa fel că avem $\frac{FF'}{MS} = \frac{iF}{iM} = \frac{a(\sqrt{2}+1)}{a}$. Cum $MS = a\sqrt{2}$ rezultă $FF' = a\sqrt{2}(1+\sqrt{2}) = a(2+\sqrt{2})$ și $GF' = a\sqrt{2}$. Avem $MS = GF' = MG$ și deci $MGF'S$ este un paralelogram (romb) de latură $a\sqrt{2}$. Dreapta SI taie pe $F'K$ într-un punct K așa fel ca triunghiul $SF'K$ să fie dreptunghic isoscel, deci $F'K = a\sqrt{2}$. Cum $F'K = F'G$, (Fig. 4.50 b)



a

Fig. 4.50 a



b

Fig. 4.50 b

triunghiurile dreptunghice $GF'K$ și GFB sînt asemenea, deci dreapta BG trece prin K. Avem $KG = KS = 2a$. În plus, $KI = KS + SI = 2a + a\sqrt{2} = a(2+\sqrt{2})$ de unde $KO^2 = KL^2 + IO^2 = a^2(7+4\sqrt{2})$. 3° J fiind intersecția diagonalelor feței $BCGF$, planul KJO ce trece prin dreapta OJ (paralelă cu fața $EFGH$) întîlnește această față după $GH \| OJ$, deci KO întîlnește pe GH într-un punct U. Triunghiurile KOJ și KUG fiind asemenea ne arată că $\frac{GU}{JO} = \frac{KG}{KJ} = \frac{2a}{a(2+\sqrt{2})}$ deci $GU = a(2-\sqrt{2})$. 4° Notăm cu L_1 intersecția lui SM cu EF. Triunghiul LOL_1 este dreptunghic în O așa că tangenta la sfera (Σ), aflată în planul SMO și paralelă cu BG deci și cu OL este dreapta L_2V, dusă prin L_2 paralel cu OL, L_2 fiind așezat pe OL_1 și sfera (Σ). După teorema lui Thales avem $\frac{LV}{LL_1} =$

$= \frac{OL_2}{OL_1}$; $LV = a\sqrt{2}$ deci $LV = F'G$ distanța de la punctul V la fața $CDGH$ este egală cu distanțele punctelor F' și K la aceeași față. ● **51.** Locul geometric descris de punctul M este dreapta OK, paralelă la SB și care trece prin mijlocul lui SA, notat cu K. Dreapta ED generează un plan paralel cu SB și care taie conul după o parabolă, cu vîrful în K și cu axa de simetrie KO. Dacă raportăm parabola la axa ei de simetrie și la tangenta în vîrf, ecuația ei este de forma $y^2 = 2px$. Cînd $x = OK = \frac{BS}{2}$ $y = r$ așa că $p = \frac{y^2}{2x} = \frac{r^2}{BS}$. Din triunghiul dreptunghic, AOS, $AS = \frac{r}{\cos\alpha}$ așa că $y^2 = 2rx\cos\alpha$. Cînd notăm $\widehat{SAC} = \theta$, $\widehat{ASB} = \pi - 2\alpha$ și $\widehat{ACS} = 2\alpha - \theta$ apoi $\frac{SC}{\sin\theta} = \frac{AC}{\sin 2\alpha} = \frac{AS}{\sin(2\alpha - \theta)}$ și $AC = \frac{r}{\cos\alpha}\frac{\sin 2\alpha}{\sin(2\alpha-\theta)} = \frac{2r\sin\alpha}{\sin(2\alpha-\theta)}$. $\cdot KM = \frac{SC}{2} = \frac{AS}{2}\frac{\sin\widehat{SAC}}{\sin\widehat{ACS}} = \frac{r}{2\cos\alpha}\frac{\sin\theta}{\sin(2\alpha-\theta)}$ așa că din ecuația parabolei, avem $DE = 2r\sqrt{\frac{\sin\theta}{\sin(2\alpha-\theta)}}$. Prin urmare $P = \frac{4r^2\sin\alpha\sqrt{\sin\theta}}{[\sin(2\alpha-\theta)]^{3/2}}$. Se deduce că dacă $\theta = 0$ și $P = 0$ iar cînd $\theta = \alpha$, $P = 4r^2$. Derivata lui P este $P' = \frac{4r^2\sin\alpha}{[\sin(2\alpha-\theta)]^2}\frac{\sqrt{\sin(2\alpha-\theta)}}{2\sqrt{\sin\theta}}[\cos\theta\sin(2\alpha-\theta) + 3\sin\theta\cos(2\alpha-\theta)]$ și se anulează pentru $\operatorname{tg}(2\alpha-\theta) = -3\operatorname{tg}\theta$ deci $\operatorname{tg}\theta = \frac{-1\pm\sqrt{1-3\operatorname{tg}^2 2\alpha}}{3\operatorname{tg}2\alpha}$. Ca să avem rădăcini reale $-\frac{1}{\sqrt{3}} < \operatorname{tg}2\alpha < \frac{1}{\sqrt{3}}$ deci $0 < 2\alpha < \frac{\pi}{6}$ sau $\frac{5\pi}{6} < 2\alpha < \pi$. Revine $0 < \alpha < \frac{\pi}{12}$ sau $\frac{5\pi}{12} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. *I.* Cînd $\frac{5\pi}{12} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ avem un maxim și un minim. II. Cînd $\frac{\pi}{12} < \alpha < \frac{5\pi}{12}$ derivata nu are rădăcini (reale) iar III. cînd $0 < \alpha < \frac{\pi}{12}$ ea se anulează în afara intervalului $(0, \alpha)$, căci $\operatorname{tg}(2\alpha-\theta)$ trebuind să fie negativă, deducem $2\alpha - \theta > \frac{\pi}{2}$

(cazul I), sau $\theta > 2\alpha$. Graficele cerute au un maxim și un minim dacă $\alpha > \frac{5\pi}{12}$, iar dacă $\alpha \leqslant \frac{5\pi}{12}$, graficul este monoton crescător.

● **52.** 1° Diedrele care au ca muchii pe OB sau OC sînt drepte iar cel care are muchia OA are ca măsură pe α. Măsurile fețelor sînt date în enunț. 2° În triunghiul isoscel OBC avem $BC = 2l \sin \frac{\alpha}{2}$. Triunghiurile dreptunghice isoscele AOB și AOC ne dau $AB = AC = OB\sqrt{2} = l\sqrt{2}$ așa că semiperimetrul triunghiului ABC este $p = l\left(\sqrt{2} + \sin \frac{\alpha}{2}\right)$, și aria se obține cu formula lui Heron

$$S = l^2 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{2 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}; \quad R = \frac{abc}{4S} = \frac{l}{\sqrt{2 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}};$$

$$r = \frac{S}{p} = \frac{l \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{2 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{2} + \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Pentru cercurile exînscrise ne folosim de

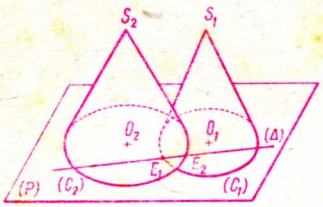
$$r_a = \frac{S}{p - a} = \frac{l \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{2 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{2} - \sin \frac{\alpha}{2}}; \quad r_b = r_c = \frac{S}{p - b} = l \sqrt{2 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

3°. Vrem să avem

$$\frac{l \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{2 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}} + 2l \sqrt{2 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}} - \frac{Kl \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{2 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{2} + \sin \frac{\alpha}{2}} = 0$$

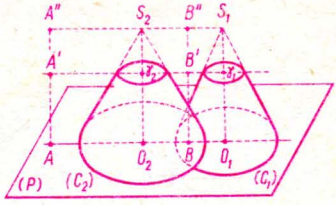
sau $(K-1) \sin^2 \frac{\alpha}{2} - (K-1)\sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2} + 4 = 0$ deci

$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{2}(K-1)\pm\sqrt{2(K-1)^2-16(K-1)}}{2(K-1)}=\frac{\sqrt{2}}{2(K-1)}[K-1\pm$ $\pm\sqrt{(K-1)(K-9)}]$. Valorile sinusului trebuie să fie reale și, în modul, cel mult echiunitare, deci $K<1$ sau $K>9$ dar pentru că $r_a+r_b+r_c=Kr$ trebuie K să fie pozitiv și $0<\sin\frac{\alpha}{2}<1$. Produsul rădăcinilor este $\frac{4}{K-1}$ și suma $\sqrt{2}$. Cînd $K>9$ amîndouă rădăcinile sînt pozitive ● **53.** 1° În sferă sînt o infinitate de secțiuni plane al căror diametru să fie cît cel dat. Toate aceste secțiuni sînt tangente la o sferă concentrică cu cea dată și a cărei rază este cît distanța d de la centrul sferei date pînă la una din aceste secțiuni. Ducem diametrul sferei cu raza d, perpendicular pe planul paralel cu secțiunea dorită și la extremitățile acestui diametru, trasăm planele tangente. 2° Dacă notăm cu $2r$ diametrul secțiunii, atunci $r^2+d^2=R^2$ și înălțimea prismei este $2d$ iar aria bazei este aria hexagonului regulat înscris în cercul cu raza r. 3° Ariile calotelor determinate de fețele bazelor sînt date de $S=2\pi R(R-d)$; ariile calotelor determinate de planele fețelor laterale sînt egale între ele și sînt date de $S'=2\pi R(R-a_6)=2\pi R\left(R-r\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. 4° Muchiile laterale fiind perpendiculare pe baze se formează unghiul plan corespunzător diedrului căutat, într-un triunghi dreptunghic în care o catetă este muchia laterală a prismei și cealaltă catetă este dublul apotemei hexagonului, deci $\operatorname{tg}\alpha=\frac{2d}{2r\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2d}{\sqrt{3}\sqrt{R^2-d^2}}$. ● **54.** 1° Să notăm cu (γ_1) și (γ_2) cercurile de secțiune ale conurilor cu planul (Q), deci centrele lor sînt γ_1 și γ_2 iar A' și B' sînt centrele lor de omotetie (directă, respectiv inversă). Punctele A' și B' împart segmentul $\gamma_1\gamma_2$ în raportul razelor cercurilor (γ_1) și (γ_2). Raportul razelor cercurilor (γ_1) și (γ_2) se obține ținînd seama că, dacă R_1 și R_2 sînt razele cercurilor (C_1) și (C_2), atunci $\rho_1=\frac{R_1S_1\gamma_1}{S_1O_1}$; $\rho_2=\frac{R_2S_2\gamma_2}{S_2O_2}$ deci $\frac{\rho_1}{\rho_2}=\frac{R_1}{R_2}$ și prin urmare $\frac{A'\gamma_1}{A'\gamma_2}=\frac{\gamma_1B'}{B'\gamma_2}=\frac{R_1}{R_2}=\frac{AO_1}{AO_2}=\frac{O_1B}{BO_2}$, unde prin A și B am notat centrele de omotetie ale cercurilor (C_1) și (C_2). Cum $\gamma_1\gamma_2=O_1O_2$ rezultă că $A'\gamma_1=AO_1$; $\gamma_1B'=O_1B$ iar punctele A' și B' descriu perpendicularele ridicate în A și B pe planul (P) (Fig. 4.54 *a*, b). Cînd planul (Q) se deplasează numai între planul (P) și planul paralel cu el, dus prin vîrfurile conurilor, S_1 și S_2, A' și B' descriu segmentele



a

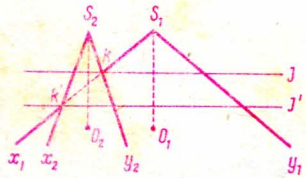
Fig. 4.54 a



b

Fig. 4.54 b

AA'', BB''. 2° Dacă cercurile (C_1) și (C_2) le presupunem secante, atunci planul $S_1S_2O_2O_1$, perpendicular pe planul (P) taie conurile după generatoarele S_1x_1; S_1y_1; S_2x_2; S_2y_2. Cînd conul cu vîrful în S_1 are unghiul generatoarelor cel mai mare, generatoarea S_1x_1 taie generatoarea S_2y_2 în K și generatoarea S_2x_2 în K'. Cercurile (γ_1) și (γ_2) vor avea puncte comune dacă urma planului (Q) pe planul $S_1S_2O_2O_1$, pe care o notăm cu (L), este cuprinsă între paralele la S_1S_2, KJ și $K'J'$.



c

Fig. 4.54 c

Cînd (L) este cuprinsă între S_1S_2 și KJ, cercurile (γ_1) și (γ_2) sînt exterioare. Cînd (L) este dedesubtul lui $K'J'$ față de S_1S_2, cercul (γ_2) este interior cercului (γ_1). Cînd cele două conuri se mărginesc la bazele lor (C_1) și (C_2) atunci cercurile (γ_1) și (γ_2) vor fi secante dacă (L) este între KJ și O_1O_2 (Fig. 4.54 c). Dacă M este un punct comun cercurilor (γ_1) și (γ_2) avem $\frac{M\gamma_1}{M\gamma_2}=\frac{R_1}{R_2}$, iar proiecțiile lui γ_1, γ_2 și M pe planul (P) vor fi în O_1, O_2 și m, deci $\frac{mO_1}{mO_2}=\frac{R_1}{R_2}$. Așa că punctul m descrie cercul care este loc geometric al punctelor al căror raport al distanțelor la punctele O_1 și O_2 este constant, egal cu $\frac{R_1}{R_2}$. Acesta este tocmai cercul de diametrul AB, care trece prin intersecțiile cercurilor (C_1) și (C_2), presupuse secante. 3° Punctul N de intersecție a generatoarelor S_1E_1 și S_2E_2, este o poziție particulară a punctului M, deci locul geometric descris de proiecția n a lui N, este tocmai cercul descris de punctul m.

Trebuie observat că n nu descrie decît arcul de pe (C_2) interior cercului (C_1). ● **55.** Pentru că triunghiul este înscris în cercul dat, de centru punctul fix O, și are ortocentrul fix, în H, rezultă că centrul cercului lui Euler, aflat la mijlocul lui OH, este un punct fix. Raza cercului lui Euler este jumătate din raza cercului circumscris. Știm că cercul lui Euler trece prin mijloacele laturilor, prin picioarele înălțimilor și prin mijloacele segmentelor care unesc ortocentrul cu vîrfurile triunghiului. Locul mijloacelor laturilor triunghiului este deci cercul lui Euler. Discuție. Dacă ortocentrul H este în afara cercului circumscris și dacă cercul lui Euler nu taie cercul circumscris, nu există nici un triunghi ABC care să fie înscris în (O) și cu ortocentrul în H. Cînd cercul lui Euler intersectează cercul circumscris (O), locul geometric este format numai din punctele cercului lui Euler, interioare cercului (O). ● **56.** 1° În triunghiurile MOP și MOQ se aplică teorema lui Pitagora generalizată și se obține $y=\dfrac{x^2+R^2-2Rx\cos\alpha}{x^2+R^2-2Rx\cos\beta}$. Derivata $y'=2R(\cos\alpha-\cos\beta)\cdot$

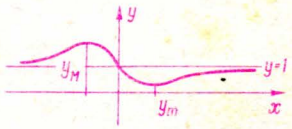


Fig. 4.56

$\cdot\dfrac{x^2-R^2}{(x^2+R^2-2Rx\cos\beta)^2}$ arată că avem extreme cînd $x=\pm R$: un maxim pentru $x=-R$ și un minim pentru $x=+R$. Valoarea maximă a lui este $y_M=\dfrac{1+\cos\alpha}{1+\cos\beta}$ iar valoarea minimului $y_m=\dfrac{1-\cos\alpha}{1-\cos\beta}$. 2° Graficul variației se poate urmări în Fig. 4.56. Cînd raportul $\dfrac{MP}{MQ}=K$ avem $\dfrac{x^2+R^2-2x\,R\cos\alpha}{x^2+R^2-2x\,R\cos\beta}=K^2$ deci $x^2(1-K^2)-2Rx(\cos\alpha-K^2\cos\beta)+R^2(1-K^2)=0$ și avem două puncte dacă discriminantul este pozitiv, deci cînd $R^2(\cos\alpha-K^2\cos\beta)^2-R^2(1-K^2)^2>0$ sau $[1+\cos\alpha-K^2(1+\cos\beta)][-1+\cos\alpha+K^2(1-\cos\beta)]>0$, deci discriminantul este pozitiv, dacă $y_m\leqslant k^2\leqslant y_M$. Punctele sînt atunci de aceeași parte a lui O. 3° $OM\cdot OM'=R^2$; $x=\pm R$. ● **57.** 1° Notînd cu MD și ME razele cercurilor de intersecție dintre plan și emisferă, respectiv con (Fig. 4.57 a) avem $MD=\sqrt{R^2-x^2}$, $ME=\dfrac{2R-x}{2}$, deci aria coroanei circulare este $S=$

$=|\pi MD^2-\pi ME^2|=\frac{\pi}{4}|4Rx-5x^2|$, deci $S=\frac{\pi}{4}(4Rx-5x^2)$, dacă $x\leqslant\frac{4R}{5}$ și $S=\frac{\pi}{4}(5x^2-4Rx)$, dacă $\frac{4R}{5}\leqslant x\leqslant R$. 2° Variația ariei S este dată în Fig. 4.57 b. 3° Valorile lui x sînt $x_{1,2}=\frac{2R}{5}(1\pm\sqrt{1-5m})$ și $x_3=$ $=\frac{2R}{5}(1+\sqrt{1+5m})$. Dacă $m=0$ avem două soluții, dacă $0<m\leqslant\frac{1}{5}$

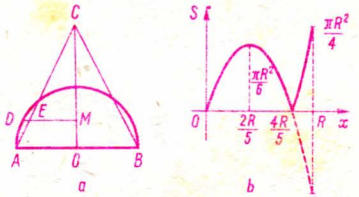


Fig. 4.57 a. b

avem trei soluții, iar dacă $m>\frac{1}{5}$ avem o soluție. 4° Rădăcinile x_1, x_2, x_3 sînt în progresie aritmetică, dacă $x_1+x_3=2x_2$, deci dacă $1-\sqrt{1-5m}+1+\sqrt{1+5m}=2(1+\sqrt{1-5m})$. Rezultă $m=\frac{4}{25}$ și rădăcinile sînt $\frac{2R}{5}\left(1\pm\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$; $\frac{2R}{5}\left(1+\frac{3}{\sqrt{5}}\right)$, toate mai mici decît R. ● **58.** Triunghiurile asemenea DTA, DBT, ne dau relațiile

$$\frac{TA}{TB}=\frac{DA}{DT}=\frac{DT}{DB},\text{ de unde }\frac{TA^2}{TB^2}=\frac{DA}{DB}.$$

Analog din triunghiurile asemenea ESA, ESC, avem

$$\frac{SA^2}{SC^2}=\frac{EA}{EC}.$$

Dreapta DE fiind paralelă cu BC avem de asemenea

$$\frac{DA}{DB}=\frac{EA}{EC}\text{ și prin urmare }\frac{TA}{TB}=\frac{SA}{SC},\text{ sau }\frac{TA}{SA}=\frac{TB}{SC}.$$

Notînd $K=BS\cap CT$, din triunghiurile asemenea KBT, KCS vom avea

$$\frac{TB}{SC}=\frac{KB}{KC}=\frac{TA}{SA}, \text{ sau } KB\cdot SA=KC\cdot TA.$$

Proiectînd ortogonal K în M și N, respectiv pe AB și AC, avem

$$MK=KB\sin A\widehat{BK}=\frac{KB\cdot AS}{2R},\quad NK=KC\sin A\widehat{CK}=\frac{KC\cdot AT}{2R},$$

unde R este raza cercului circumscris triunghiului ABC. Rezultă $MK=NK$, deci K aparține bisectoarei unghiului A. Dacă unghiurile $A\widehat{DT}$, $A\widehat{DS}$ sînt de sens contrar, punctele S și T aparțin arcului de cerc cu coarda BC și K aparține bisectoarei interioare a unghiului $B\widehat{AC}$. Dacă unghiurile $A\widehat{DT}$ și $A\widehat{ES}$ sînt de același sens, unul din punctele T și S este pe arcul BAC, iar celălalt pe restul cercului și K se află pe bisectoarea exterioară a unghiului BAC.

● **59.** 1° Se construiește triunghiul BCG care are ca laturi latura a, $\frac{2}{3}m_b$ și $\frac{2}{3}m_c$. Apoi se prelungește latura BC cu jumătatea ei și se obține M mijlocul laturii AC; se unește C cu M și se ia $CA=2CM$. 2° Se presupune problema rezolvată și se notează cu G centrul de greutate al triunghiului și cu M, N, P mijloacele laturilor BC, CA și AB. Notînd cu S mijlocul lui BG, triunghiul GPS are laturile $GP=\frac{m_c}{3}$; $PS=\frac{m_a}{3}$; $SG=\frac{m_b}{3}$. Prin urmare, construim triunghiul GPS care are toate laturile cunoscute și apoi prelungim SG cu segmentul $GN=SG$ și pe PG cu $GC=2PG$. Se unește apoi C cu N și se ia $CA=2CN$. Se unește A cu P și se prelungește AP cu PB așa fel că $AB=2AP$; la urmă se unește B cu C. Problema este posibilă cînd se poate construi triunghiul GBS, adică $m_c<m_b+m_a$ și $m_a>m_c-m_b$. ● **60.** 3° Unghiul făcut de bisectoarele din B și C este de $90°+A/2$.

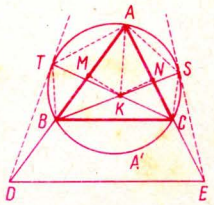


Fig. 4.58

Index alfabetic

antideplasări 7
antiparalele 17
apotemă 44, 89
Apoloniu 36, 78
arc de cerc capabil de un unghi dat 22
asemănare (triunghiuri) 31
asemănare (transformare) 68
asimptotă 74
axă 93
—, radicală 23
axiomă 8, 127
biraport 11
bisectoare 13, 29
Beltrami 128
Bolyai 128
Brianchon 69
calotă sferică 106
Cantor 132
catetă 28
centru, de greutate 29
—, radical 25
cerc 17
—, circumscris 18
—, inscris 18
—, celor nouă puncte 36
cercuri, concentrice 20
—, ortogonale 20
—, secante 20
—, tangente 20
Ceva 39
cilindru 101
coliniare (puncte) 38
coliniari (vectori) 93
componente (vectori) 96
con 102
conjugat armonic 11
conică 72
corolar 8
cosinus 109
cosinusuri directoare 98
cuadrică 102
cub 88
curbă 7
decagon 47
deplasări 7
diametru (conică) 77
—, conjugat 78
diedru 83
directoare 75,
disc (circular) 18
diviziune armonică 10
dodecagon 49
dodecaedru 87
dreaptă 8, 79
—, directoare 86, 95
—, proiectantă 86, 95
drepte, conjugate 26, 77
—, izogonale 29
dreptunghi de aur 62
echipolență (vectori) 92
egalități trigonometrice 121
Elementele lui Euclid 8, 127
elipsă 72
elipsoid 102
Euclid 8, 15, 127
Euler 87, 90
excentricitate 73
fascicol armonic 12
figură 7
figuri, asemenea 7
—, congruente 7
—, echivalente 28
—, egale 7
—, inverse 70
—, izomere 7
—, omoloage 7
focar 72, 74, 75
formule de adunare 116
funcții trigonometrice 8, 109
—, inverse 114
Gauss 128
geometrie, eliptică 128
—, euclidiană 128
—, hiperbolică 128
—, în spațiu 8, 79
—, neeuclidiană 128
—, parabolică 128
—, plană 8, 9
grad, centesimal 15
—, hexagesimal 15

heptagon 26
Heron (formula) 39
hexaedru 87
hexagon 26
Hilbert 129
hiperbolă 74
—, conjugată 74
—, echilateră 74
hiperboloid 102
icosaedru 87
imagine 66
inecuație trigonometrică 122
inversiune 70
ipotenuză 28
înălțime 29
izometrie 7
lemă 8
Lemoine 29
Leonardo da Vinci 62
Lobacevski 128
linie, dreaptă 8
—, frîntă 9
loc geometric 92
mărime, scalară 92
—, vectorială 92
mediană 29
mediatoare 29
medie armonică 11
Menelaus 38
normală 18
oblică 13
octaedru 87
octogon 26
omoloage (figuri) 66
omotetie 68
ortocentru 29
Pappus 43
parabolă 75
paraboloid 102
paralele 15
paralelipiped 88
Pascal 70
patrulater 26
—, complet 42
pătrat 47
pentadecagon 26
pentaedru 87
pentagon 26
—, regulat 47
perpendiculară 13
—, comună 86
piramidă 89
Pitagora 33
plan 8, 79
—, bisector 83
—, de proiecție 86
—, director 95
placă poligonală 26
pol 12, 25, 77, 106
polară 12, 25, 77
poliedru 87
—, regulat 87, 90
poligon 9, 26
—, circumscris 26
—, concav 26
—, convex 26
—, înscris 26
—, regulat 26, 43
—, simplu 26
—, regulat, stelat 27, 44
poligoane, asemenea 27
—, egale 27
postulat 8
—, al lui Euclid 15, 128
proiecție 14, 85
—, ortogonală 86, 95
—, paralelă 86, 95
prismă 87
produs, dublu vectorial 100
—, mixt 100
—, scalar 98
—, vectorial 99
propoziție 8
Ptolemeu 41, 70
punct 7
puncte, conjugate 26, 77
—, omoloage 7
putere a unui punct 23, 105
radian 15
raport, armonic 11
—, de asemănare 7
relație metrică 33
regula paralelogramului 93
Riemann 128
romb 41
romboedru 88
rotație 7, 67
secantă 18
sector, de cerc 20
—, sferic 107
secțiune de aur 62
segment 7
—, de cerc 19
—, (arc) de cerc capabil de un unghi dat 22
—, sferic 107
semicerc 18
semidreaptă 8
semiplan 8

sferă 104
—. unitate 85
simediană 29
simetrie 67
sinus 109
Stewart 35
suprafață 7
—, de rotație 103
Tales 30
tangentă 11
—, comună 18
—, a unui unghi 109
teorema, lui Apoloniu 36, 78
—, bisectoarei 30
—, lui Brianchon 69
—, celor trei perpendiculare 82
—, lui Ceva 39
—, cosinusului 122
—, lui Euler 87
—, medianei 34
—, lui Menelaus 38
—; lui Pappus 43
—, lui Pascal 70
—, lui Pitagora 33
—, lui Pitagora generalizată 34, 122
—, proiecțiilor 122
—, lui Ptolemeu 41, 70
—, sinusurilor 122
—, lui Stewart 35
—, lui Tales 30
—, tangentelor 122
teoremă 7
—, reciprocă 8
tetraedru 87
transformare, geometrică 7, 66
—, inversă 66
—, prin polare reciproce 69
—, prin raze vectoare reciproce 69
translație 7, 66
transversală 38
trapez 40
triedru 84
—, suplimentar E.IV.41
trigonometrie, plană 8
—, sferică 8
trisectoare 13
triunghi 26, 28
trunchi de, con 102
—, piramidă 89
—, prismă 90
unghi 12, 13
—, la centru 15
—, diedru 83
—, geometric 13
—, orientat 13
—, plan (diedru) 84
—, poliedru 84
—, de rotație 13
—, simplu 12
—, solid 85
—, triedru 84
unghiuri, alterne interne 16
—, complementare 14
—, corespondente 16
—, externe 16
—, interne 16
—, suplimentare 14
vector 92
—, alunecător 92
—, legat 92
—, liber 92
—, proiecție 95
versor 93
volum 7
zonă sferică 107

Redactor: MONICA CREMENE
Tehnoredactor: CONSTANTIN RUSU

Apărut: 1978. Bun de tipar: 17.06.1978
Comanda nr.: 1378. Coli de tipar: 26,25
Tiraj: 166.000 + 90 + 10
Hîrtia: scris I 61 × 86/42 grad alb 85%
Format: 61 × 86/16

Tiparul executat sub comanda nr. 1181
Întreprinderea poligrafică Brașov
Str. Zizinului nr. 110
Republica Socialistă România

129